

自动控制原理

邢春芳 主编

以简明的语言介绍概念，简化数学推导，增加实例说明，方便自学自用
从原理的角度对工程实例进行分析和设计，控制理论与工程实例相结合
增加综合性例题分析，加深对控制理论的理解并提高分析综合问题能力





21 世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

自动控制原理

主　编　邢春芳
副主编　李正斌　张天鹏　尹　萍
主　审　赵书俊

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书从实际应用出发，简明扼要地介绍了自动控制的基本理论及其工程应用。全书共分8章，内容包括自动控制系统概述、控制系统的数学模型、时域分析法、根轨迹分析法、频率特性法、控制系统的设计与校正、线性离散控制系统的分析和非线性系统分析等传统内容，但强调物理概念和实际应用。为强化工程应用背景，本书还系统介绍了现代MATLAB应用技术。

本书在数学基础、控制理论、工程应用及MATLAB仿真方面，具有系统性和统一性，并对例题和习题进行了精选，难易结合。本书可供工科高等院校使用，适合于作为应用型本科自动化专业、电气工程及自动化专业、机电一体化及各相关专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/邢春芳主编．—北京：北京大学出版社，2013.8
(21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材)
ISBN 978-7-301-22936-1

Ⅰ.①自…　Ⅱ.①邢…　Ⅲ.①自动控制理论—高等学校—教材　Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第176131号

书　　名：自动控制原理
著作责任者：邢春芳　主编
策 划 编 辑：郑　双
责 任 编 辑：郑　双
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-22936-1/TP · 1297
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　新浪官方微博:@北京大学出版社
电 子 信 箱：pup_6@163.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
印　刷　者：
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　20.5印张　474千字
2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷
定　　价：39.00元

前　言

众所周知，自动控制作为技术改造和技术发展的重要手段，已大量应用于空间科技、军事装备自动化、冶金、化工及交通管理、环境保护等领域。这不仅使得生产设备或生产过程实现自动化，大大提高了劳动生产率和产品质量，改善了劳动条件，而且在人类征服自然、改善生活条件等方面也发挥了非常重要的作用。

本书共分8章，主要内容分为3大部分：第1部分包括基本概念、线性系统的数学模型、时域响应分析、根轨迹分析、频域特性分析、控制系统设计与校正，这些内容属于线性定常连续控制系统问题，主要阐明自动控制的3个基本问题，即模型、分析和控制；第2部分是对作为数字控制理论基础的采样控制系统进行的讨论，重点介绍采样系统的数学模型、稳定性分析与响应分析；第3部分阐述非线性系统的基本理论和分析方法，包括相平面法和描述函数法，目的是为学生进一步学习后续课程打下一定的基础。在各章节的最后，都结合各章内容介绍了 MATLAB 分析和设计自动控制系统的基本方法。

本书是为适应自动化学科的发展，优化整体教学体系的教学改革形势，按照“理论讲透，重在应用”的原则，总结了课题组成员多年的教学经验和课程教学改革的成果，参考了国内外控制理论及应用发展的方向，并吸取了兄弟院校教材的部分内容，经反复讨论编写而成的。可供自动化专业及其他电气信息类专业本科生使用。

本书的主要特点是：以简明的语言介绍概念，简化数学推导，增加实例说明，方便自学；从自动控制原理的角度对工程实例进行分析和设计，以解决理论如何用于工业实际的问题，使得理论与实际的紧密结合。为了在较少的学时内能使学生较系统地掌握控制理论中最基本的理论和分析方法，并对一些新的理论和方法有初步了解，本书在内容的组织上，力求做到突出重点，删去传统控制理论中一些不常用的内容。在内容叙述上，侧重于基本概念和实际应用。为了加深学生对控制理论基本概念的理解和分析综合问题能力的提高，除第1章外，在其余各章均附有一定数量的综合性例题分析。

本书由安阳工学院邢春芳担任主编并负责全书统稿，安阳工学院李正斌、张天鹏和北京佰能电气技术有限公司尹萍担任副主编，协助主编完成统稿工作。参加本书编写工作的还有安阳工学院翟亚芳、雷慧杰、范秋凤、陈彦涛、卢春华。本书由郑州大学的赵书俊教授担任主审，并提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，得到了安阳工学院张继军教授、马金元副教授、赵艳春高级实验师的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢。借此机会向所有关心、支持和帮助本书编写、出版、发行工作的同志们表示诚挚的谢意。

由于编者的水平有限，时间仓促，书中不妥与错误之处在所难免，恳请广大读者和专家批评指正。

2013 年 1 月

目　　录

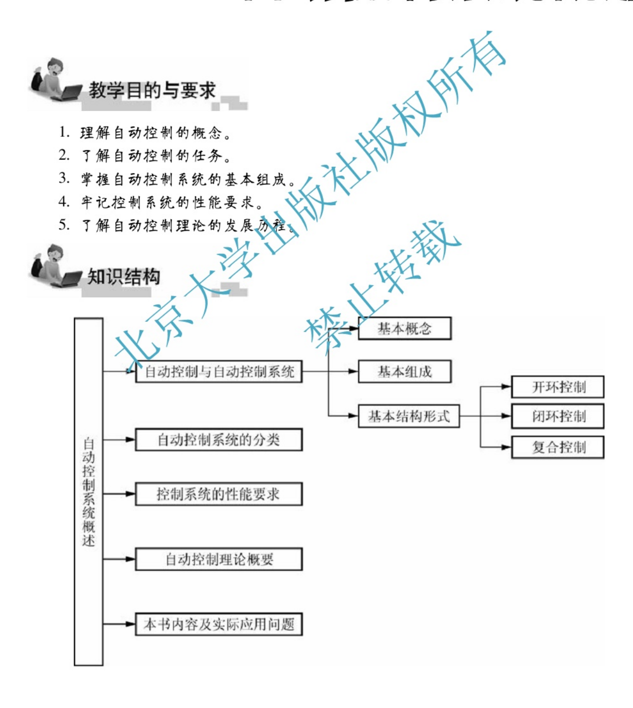
第1章

自动控制系统概述

教学目的与要求

1. 理解自动控制的概念。
2. 了解自动控制的任务。
3. 掌握自动控制系统的基本组成。
4. 牢记控制系统的性能要求。
5. 了解自动控制理论的发展历程。

知识结构





在科学技术飞速发展的今天，自动控制理论和技术已经成为现代社会不可缺少的组成部分，并在机械、冶金、石油、化工、电子、电力、航空、航海、航天、核反应堆等各个学科领域得到了广泛应用。近年来，控制学科的应用范围还扩展到了交通管理、生物医学、生态环境、经济管理、社会科学和其他许多社会生活领域，并为各学科之间的相互渗透起到了促进作用。

自动控制理论是研究关于自动控制系统组成、分析和设计的一般性理论，是研究自动控制共同规律的技术科学。学习和研究自动控制理论是为了探索自动控制系统中变量的运动规律和改变这种运动规律的可能性和途径，为建立高性能的自动控制系统提供必要的理论依据。作为现代的工程技术人员和科学工作者，具备一定的自动控制理论基础知识是很有必要的。

1.1　自动控制与自动控制系统

1.1.1　自动控制及其任务

在现代科学技术的众多领域中，自动控制作为重要的技术手段，能够解决哪类性质的工程问题，承担什么样的技术任务？

在工业生产中，任何技术设备、机器和生产过程都必须按要求运行。例如，若要化学反应达到预期的要求，化学反应炉的温度和压力就必须维持恒定；要使发电机正常供电，其输出电压就必须保持恒定，尽量不受负荷变动的干扰；若要数控机床加工出高精度的零件，其刀架的进给量必须准确地按照程序指令的设定值变化，等等。其中化学反应炉、发电机、机床是工作的主体设备，而炉温、炉压、电压、进给量则是表征这些设备工况的关键参数，额定电压、设定进给量、规定的炉温、炉压就是在设备运行中对工况参数的具体的要求。按照特定的要求来操纵工况参数，即机器设备运行的实质。

将被控制的机器设备称做被控对象（或简称对象），将表征其工况的关键参数称做被控制量，而将对这些工况参数所希望达到的值称作给定值（或希望值、参考输入）即给定量，则控制任务可抽象为使受控制对象的被控量按给定量变化。

如果这个任务不是直接由人工承担，而是靠控制装置来完成，即在无人直接参与的情况下，利用控制装置操纵受控对象，使受控对象的被控量按给定量或给定信号变化规律去变化，如图 1.1 所示，则称其为自动控制。

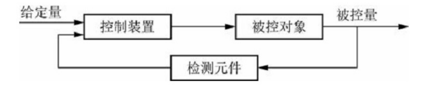


图 1.1　自动控制示意图

运行中，被控量以时间函数 $c(t)$ 表示，给定量以 $r(t)$ 表示，则自动控制的任务是使受控对象满足



$$c(t) \approx r(t)$$

由受控对象和控制器按一定方式连接起来的、完成一定自动控制任务的总体称为自动控制系统。对自动控制系统的性能进行分析和设计则是自动控制原理的主要任务。下面进一步举例说明。

【例1-1】 图1.2(a)所示是人工控制水位保持恒定的供水系统，图1.2(b)是人工控制的水位系统原理图。当流入量、流出量相等时，水池水位处于平衡状态，稳定在某个要求的水位上。当流出量发生变化或要求的水位发生变化时，就需要对流入量进行必要的控制。在人工控制方式下，工人用眼观看水位情况，用脑根据经验比较实际水位与期望水位的差异并做出决策，确定开大还是关小进水阀门及开关量是多少，然后用手操作进水阀门进行调节，最终使实际水位等于要求的水位。只要水位偏离了期望值，工人便要重复上述调节过程。

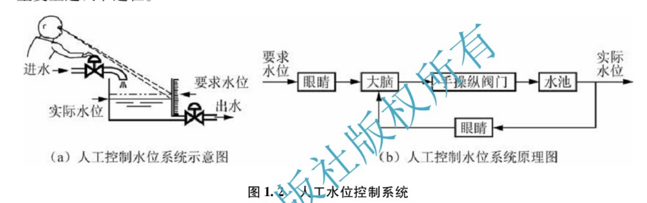


图1.2 人工水位控制系统

这里有一个自动控制里的重要概念：反馈。反馈是一个过程：

(1) 设定目标：希望的水位高度。

(2) 测量状态：用眼睛观察水位。

(3) 将测量到的状态与设定目标比较，判断二者的差距以及向哪个方向操纵阀门。

(4) 调整行动：根据经验由偏差的大小决定阀门的开关方向。

(5) 实际执行：用手调整阀门的开度。

在人工水位控制过程中，这个反馈过程是周而复始，不断进行的。

同样是水池液位控制，若用浮子测量实际水位的高低，并与要求的水位比较，得出偏差；再由调节元件根据偏差的大小和正负产生控制信号；最后由执行元件根据控制信号产生控制作用，就构成了如图1.3所示的水位自动控制系统。连杆的一端由浮子带动，另一端则通过放大器、电动机等装置与进水阀门相连。当用水量增大时，水位开始下降，

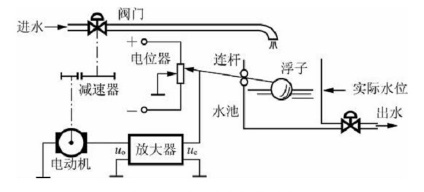


图1.3 水位自动控制系统

浮子也随之降低，通过连杆的作用将进水阀门开大，使水位回到期望值附近。反之，若用水量变小，水位及浮子上升，进水阀关小，水位自动下降到期望值附近。

在该系统中，水池中的水位是被控量，水池是控制对象，浮子是测量元件，代替人的眼睛，用来测量水位高低。浮子测出实际水位，由连杆和电位器进行比较：浮子低则电位器上得到正电压，经放大后使电动机向进水阀门开大的方向旋转；反之，当浮子高时，电位器上得到负电压，电动机向阀门关小的方向旋转；若水位正好，则电位器上电压为零，电动机不转，阀门不动。连杆和电位器相当于人的大脑，起调节作用。电动机和减速器具有手的功能，称之为执行机构。整个过程中无需人工直接参与，控制过程是自动进行的。系统的原理框图如图 1.4 所示。

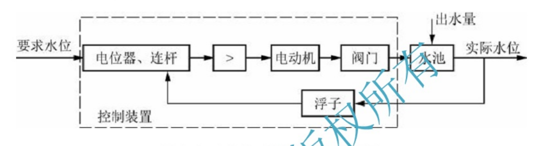


图 1.4　水位自动控制系统原理框图

由此例可知，自动控制和人工控制极为相似，自动控制系统只不过是把某些装置有机地组合在一起，以代替人的职能而已。

1.1.2　自动控制系统的基本组成

任何一个自动控制系统都是由被控对象和控制装置构成的。自动控制系统根据被控对象和具体用途不同，可以有各种不同的结构形式。图 1.5 是自动控制系统的基本组成框图，图 1.5 中用方框代表系统中具有相应职能的元部件，用箭头表示元部件之间的信号及其传递方向。通常，把从系统输入量到输出量之间的通道称为前向通道（即前向通路）；从输出量到反馈信号之间的通道称为反馈通道（即反馈通路）。方框图中用符号“⊗”表示比较环节，其输出量等于各个输入量的代数和。因此，各个输入量均须用正、负号表明其极性，但一般输入量为正时可以省略。控制器、测量元件和执行机构这些功能元件分别承担相应的职能，共同完成控制任务。

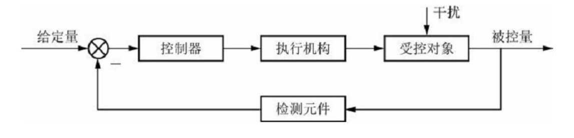


图 1.5　自动控制系统的基本组成框图

实际控制系统中，测量部件为各种工业仪表及传感器；控制器为各种比较线路、模拟运算仪表、单板机、单片机或者是可编程序控制器、工控机等；执行机构则为交、直流伺服电动机、电磁阀、液压马达、可控硅调压器、电（气）动调节阀等。

从图 1.5 中还可以看出，参与控制的原始信号有两个，即给定量和被控量，整个系统

根据其差值进行控制，因此自动控制又称为按偏差控制，即偏差是自动控制系统的依据。

控制系统中的常用术语：

(1) 控制器——外加的设备或装置，主要用于将给定信号与测量信号比较，并经过某种运算产生控制信号。

(2) 测量元件——用于检测被控量，产生反馈信号，如测速机、热电偶、自整角机、电位器、旋转变压器、浮子等。

(3) 执行机构——接收控制器的输出信号，根据该信号直接对被控对象进行操作，以调节被控量，如阀门、伺服电动机等。

(4) 受控对象——一般是指生产过程中需要进行控制的工作机械、装置或生产过程。

(5) 被控量——表征被控对象工作状态的、需要进行控制的物理参量，也称输出量。

(6) 给定量——要求被控量所应保持的数值，也称输入量或参考输入。

(7) 干扰量——系统不希望的外作用，也称扰动输入。

(8) 反馈量——由系统输出端取出并反向送回系统输入端的信号。反馈有主反馈和局部反馈之分，也有正反馈和负反馈之分。

(9) 偏差——给定量与反馈信号之差。

1.1.3 自动控制系统的结构形式

最常见的自动控制系统结构形式有开环控制和闭环控制两种。某些情况下还可将开环和闭环控制相结合构成复合控制。对于某一个具体的系统，采取什么样的控制手段，应根据具体的用途和目的而定。

1. 开环控制系统

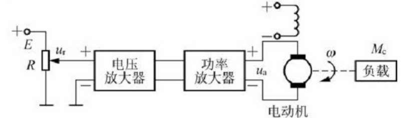
系统的控制输入不受输出影响的控制系统称为开环控制系统。在开环控制系统中，输入端与输出端之间，只有信号的前向通路而不存在由输出端到输入端的反馈通路。

图1.6(a)所示的他激直流电动机转速控制系统就是一个开环控制系统。它的任务是控制直流电动机以恒定的转速带动负载工作。系统的工作原理是：调节电位器 R 的滑臂，使其输出给定参考电压 u_r。u_r 经电压放大和功率放大后成为 u_a，送到电动机的电枢端，用来控制电动机转速。在负载恒定的条件下，他激直流电动机的转速 ω 与电枢电压 u_a 成正比，只要改变给定电压 u_r，便可得到相应的电动机转速 ω。但是，电动机负载转矩 M_c 的任何变动，都会使输出量 ω 偏离希望值，这种作用称之为干扰或扰动。所以 u_a 与 ω 的关系不精确，抗扰动能力差，系统控制精度难以保证，应用少。

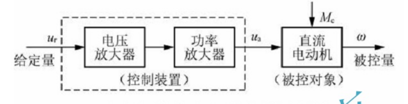
在本系统中，直流电动机是被控对象，电动机的转速 ω 是被控量，也称为系统的输出量或输出信号。把参考电压 u_r 通常称为系统的给定量或输入量。直流电动机转速开环控制系统可用图1.6(b)所示的方框图表示。

就图1.6(a) 而言，只有输入量 u_r 对输出量 ω 的单向控制作用，而输出量 ω 对输入量 u_r 却没有任何影响和联系，因此称这种系统为开环控制系统。

开环控制系统的优点是结构比较简单，成本较低。缺点是控制精度不高，抑制干扰能力差，而且对系统参数变化比较敏感。当然，如果系统的部件特性相当稳定，基本不受干扰影响，或对系统的精度要求不高的场合，也还是可用的。例如，一些自动化生产线、数控机床、自动切割机、洗衣机、步进电机控制及水位调节等常用这种控制方式。



(a) 直流电动机转速开环控制系统

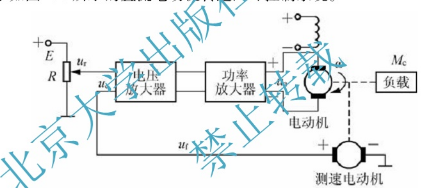


(b) 直流电动机转速开环控制系统方框图

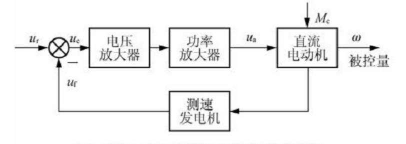
图 1.6　直流电动机转速控制系统

2. 闭环控制系统

在图 1.6 所示的直流电动机转速控制系统中，加入一台测速发电机，并对电路稍做改变，便构成了如图 1.7 所示的直流电动机转速闭环控制系统。



(a) 直流电动机转速闭环控制系统原理图



(b) 直流电动机转速闭环控制系统方框图

图 1.7　直流电动机转速闭环控制系统

图 1.7(a) 中，测速发电机由电动机同轴带动，它将电动机的实际转速 ω(系统输出量) 测量出来，并转换成电压 u_r，再反馈到系统的输入端，与给定量电压 u_r(系统输入量) 进行比较，从而得出电压 $u_e = u_r - u_f$。由于该电压能间接地反映出误差的性质(即大小和正负方向)，通常称之为偏差信号，简称偏差。偏差 u_e 经放大器放大后成为 u_a，用以控

制电动机转速 ω。

直流电动机转速闭环控制系统可用图 1.7(b)的方框图来表示。图中清楚地表明，由于采用了反馈回路，致使信号的传输路径形成闭合回路，使输出量反过来直接影响控制作用。这种通过反馈回路使系统构成闭环，并按偏差产生控制作用，用以减小或消除偏差的控制系统，称为闭环控制系统，或称反馈控制系统。例 1-1 也属于这类控制系统。

值得注意的是，在系统主反馈通道中，只有采用负反馈才能达到控制的目的。若采用正反馈，将使偏差越来越大，导致系统发散而无法工作。

闭环控制是最常用的控制方式，通常所说的控制系统，一般都是指闭环控制系统。闭环控制系统是本书讨论的重点。

闭环控制系统的优点是，不论是输入信号的变化，还是干扰的影响，或者系统内部的变化，只要被控量偏离了规定值，系统都会产生相应的作用消除偏差。但是采用反馈装置需要添加元部件，造价较高，同时也增加了系统的复杂性。如果系统的结构参数选取不适当，控制过程可能变得很差，甚至出现振荡或发散等不稳定的情况。因此，如何分析系统，合理选择系统的结构参数，从而获得满意的系统性能，是自动控制理论必须研究解决的问题。

3. 复合控制系统

反馈控制只有在外部作用(输入信号或干扰)对控制对象产生影响之后才能做出相应的控制。在受控对象具有较大时滞的情况下，尤其当控制对象具有较大延迟时间时，其控制作用难以及时影响被控量，因而不能形成快速有效的反馈控制。前馈补偿控制是在测量出外部作用的基础上，形成与外部作用相反的控制量，该控制量与相应的外部作用共同作用的结果，使被控量基本不受影响，即在偏差产生之前就进行了防止偏差产生的控制。在这种控制方式中，由于被控量对控制过程不产生任何影响，故它也属于开环控制。前馈补偿控制与反馈控制相结合，就构成了复合控制，它可以有效提高系统的控制精度。复合控制有两种基本形式：按输入前馈补偿的复合控制和按扰动前馈补偿的复合控制，如图 1.8 所示。

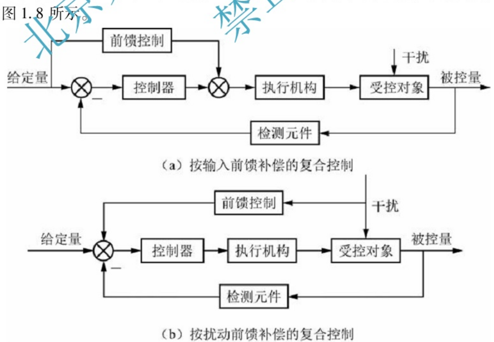


图 1.8　复合控制方式

【思考题】 1. 自动控制系统由哪几个基本环节构成？各部分承担什么作用？
2. 自动控制系统的常见结构形式有几种？各有什么特点？

1.2 自动控制系统示例

【例1-2】 函数记录仪。

函数记录仪是一种通用记录仪，它可以在直角坐标上自动描绘两个电量的函数关系。同时，记录仪还带有走纸机构，用以描绘一个电量对时间的函数关系。

函数记录仪通常由衰减器、测量元件、放大元件、伺服电动机—测速发电机组、齿轮系及绳轮等组成，其工作原理如图1.9所示。系统的输入(给定量)是待记录电压，被控对象是记录笔，笔的位移是被控量。系统的任务是控制记录笔位移，在纸上描绘出待记录的电压曲线。

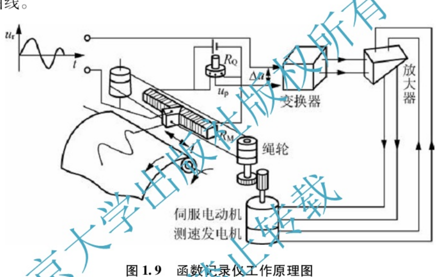


图1.9 函数记录仪工作原理图

在图1.9中，测量元件是由电位器 R_Q 和 R_M 组成的桥式测量电路，记录笔就固定在电位器 R_M 的滑臂上，因此，测量电路的输出电压 u_p 与记录笔位移成正比。当有慢变的输入电压 u_r 时，在放大元件输入口得到偏差电压 $\Delta u = u_r - u_p$，经放大后驱动伺服电动机，并通过齿轮减速器及绳轮带动记录笔移动，同时使偏差电压减小。当偏差电压 $\Delta u = 0$ 时，电动机停止转动，记录笔也静止不动。此时 $u_p = u_r$，表明记录笔位移与输入电压相对应。如果输入电压随时间连续变化，记录笔便描绘出相应的电压曲线。

函数记录仪方框图如图1.10所示。其中，测速发电机是校正元件，它测量电动机转速并进行反馈，用以增加阻尼，改善系统性能。

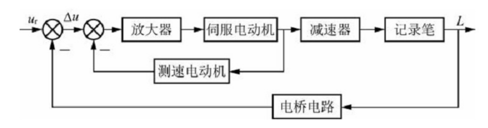


图1.10 函数记录仪控制系统方框图

【例 1-3】 火炮方位角控制系统。

采用自整角机作为角度测量元件的火炮方位角控制系统如图 1.11 所示。图中的自整角机工作在变压器状态，自整角发送机 BD 的转子与输入轴连接，转子绕组通入单相交流电；自整角接收机 BS 的转子则与输出轴(炮架的方位角轴)相连接。

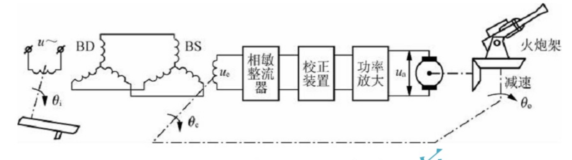


图 1.11 火炮方位角控制系统示意图

当转动瞄准具输入一个角度 θ_i 的瞬间，由于火炮方位角 $\theta_o \neq \theta_i$，会出现角位置偏差 θ_e。这时，自整角接收机 BS 的转子输出一个相应的交流调制信号电压 u_e，其幅值与 θ_e 的大小成正比，相位则取决于 θ_e 的极性。当偏差角 $\theta_e > 0$ 时，交流调制信号呈正相位；当 $\theta_e < 0$ 时，交流调制信号呈反相位。该调制信号经相敏整流器解调后，变成一个与 θ_e 的大小和极性对应的直流电压，经校正装置、放大器处理后成为 u_a。u_a 驱动电动机带动炮架转动，同时带动自整角接收机 BS 的转子将火炮方位角反馈到输入端。显然，电动机的旋转方向必须是朝着减小或消除偏差角 θ_e 的方向转动，直到 $\theta_o = \theta_i$ 为止。这样，火炮就指向了手柄给定的方位角上。

在该系统中，火炮是被控对象，火炮方位角 θ_o 是被控量，给定量是由手柄给定的方位角 θ_i。系统方框图如图 1.12 所示。



图 1.12 火炮方位角控制系统方框图

【例 1-4】 飞机-自动驾驶仪系统。

飞机自动驾驶仪是一种能保持或改变飞机飞行状态的自动装置，它可以稳定飞机的姿态、高度和航迹，可以操纵飞机爬高、下滑和转弯。飞机和自动驾驶仪组成的控制系统称为飞机-自动驾驶仪系统。

如同飞行员操纵飞机一样，飞机自动驾驶仪是通过控制飞机的三个操纵面（升降舵、方向舵、副翼）的偏转，改变舵面的空气动力特性，以形成围绕飞机质心的旋转力矩，从而改变飞机的飞行姿态和轨迹。现以比例式自动驾驶仪稳定飞机俯仰角的过程为例，说明其工作原理。图 1.13 为飞机-自动驾驶仪系统稳定俯仰角的工作原理示意图。

图 1.13 中，垂直陀螺仪作为测量元件用以测量飞机的俯仰角，当飞机以给定俯仰角水平飞行时，陀螺仪电位计没有电压输出；如果飞机受到扰动，使俯仰角向下偏离期望值，陀螺仪电位计输出与俯仰角偏差成正比的信号，经放大器放大后驱动舵机。一方面

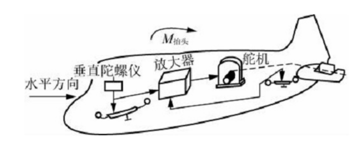


图 1.13　飞机-自动驾驶仪系统原理图

推动升降舵面向上偏转，产生使飞机抬头的转矩，以减小俯仰角偏差；同时带动反馈电位计滑臂，输出与舵偏角成正比的电压信号并反馈到输入端。随着俯仰角偏差的减小，陀螺仪电位计输出的信号越来越小，舵偏角也随之减小，直到俯仰角回到期望值，这时，舵面也恢复到原来状态。

图 1.14 是飞机-自动驾驶仪俯仰角稳定系统方框图。图中，飞机是被控对象，俯仰角是被控量，放大器、舵机、垂直陀螺仪、反馈电位计等组成控制装置，即自动驾驶仪。参考量是给定的常值俯仰角，控制系统的任务就是在任何扰动（如阵风或气流冲击）作用下，始终保持飞机以给定俯仰角飞行。

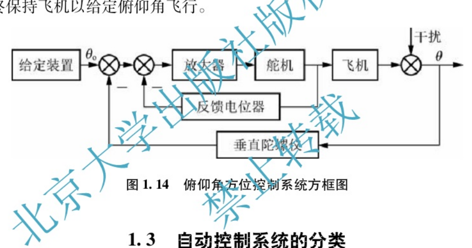


图 1.14　俯仰角方位控制系统方框图

1.3　自动控制系统的分类

自动控制系统的形式是多种多样的，用不同的标准划分，就有不同的分类方法。常见的有以下几种。

1. 定值控制系统和随动控制系统

按给定信号的形式不同，可将系统划分为定值控制系统和随动控制系统。

1）定值控制系统

定值控制系统，也称调节系统或恒值系统，其特点是，给定输入一经设定就维持不变，希望输出量维持在某一特定值上。例如，前文提到的液位控制系统、直流电动机调速系统等。

2）随动控制系统

在随动控制系统（也称随动系统）中，若给定信号的变化规律是事先不能确定的随时间变化的信号，例如，函数记录仪、自动火炮系统和飞机-自动驾驶仪系统等，则称该系统为自动跟踪系统；若给定输入是预先设定的、按预定规律变化的信号（如数控机床的输

入信号)，则称相应系统为程序控制系统。这两种系统统称为随动控制系统。

2. 定常系统和时变系统

按系统参数是否随时间变化，可以将系统分为定常系统和时变系统。

如果控制系统的参数在系统运行过程中不随时间变化，则称之为定常系统或者时不变系统，否则，称为时变系统。实际系统中的零漂、温度变化、元件老化等影响均属时变因素。严格的定常系统是不存在的，在所考察的时间间隔内，若系统参数的变化相对于系统的运动缓慢得多，则可将其近似作为定常系统来处理。

3. 线性系统和非线性系统

按系统是否满足叠加原理，可将系统分成线性系统和非线性系统。

如果一个系统在输入 $r_1(t)$ 作用下产生输出 $c_1(t)$，在输入 $r_2(t)$ 作用下产生输出 $c_2(t)$；若在输入 $a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$ 作用下系统输出为 $a_1c_1(t)+a_2c_2(t)$(其中，$r_1(t)$、$r_2(t)$是任意的输入信号；a_1、a_2 是任意的常数)，则该系统满足叠加原理，是线性系统，否则是非线性系统。

本书重点研究线性定常系统。因为对这一类系统已经形成了完整、成熟的分析与设计方法，并且在实践中获得了广泛的应用。

严格地说，实际物理系统在某种程度上都是非线性的，线性系统只是在一定条件下的理想化模型，实际上不存在。然而在很多情况下通过近似处理和合理简化，大量的物理系统都可以在一定范围内足够准确地化作线性系统来处理。对于不能进行线性化处理的本质非线性系统问题，将在第 8 章中进行讨论。

4. 连续系统与离散系统

若系统中所有信号都是连续信号，则称为连续系统。如果系统中有一处或几处的信号是离散信号(脉冲序列或数字编码)，则称为离散系统(包括采样系统和数字系统)。

随着计算机应用技术的迅猛发展，大量自动控制系统都采用数字计算机作为控制手段。在计算机引入控制系统之后，控制系统就成为离散系统了。有关离散系统分析设计的内容将在第 7 章中介绍。

5. 单变量系统和多变量系统

按照输入信号和输出信号的数目，可将系统分为单输入—单输出(SISO)系统和多输入—多输出(MIMO)系统。

单输入—单输出系统通常称为单变量系统，这种系统只有一个输入(不包括扰动输入)和一个输出。多输入—多输出系统通常称为多变量系统，有多个输入和多个输出。单变量系统可以视为多变量系统的特例。

1.4 控制系统的性能要求

按照基本控制方式特别是闭环控制系统，是否都能很好地工作，都能在运行中准确地保持被控量与给定量相等？并不一定。系统也可能工作得很不好，甚至会发生强烈振荡，使被控对象严重损坏。这将取决于受控对象和控制装置之间、各功能部件的特性参

数之间是否匹配得当。

理想情况下，被控量 $c(t)$ 和给定量 $r(t)$ 时时相等，运行中完全不受外界干扰，没有误差。而实际上，由于系统中质量、惯量、阻尼以及电路中的储能元件的存在，或由于能源的功率限制，一些运动部件的加速度不会太大，速度和位移不可能突变，而要经历一个渐变的过程。

通常将系统输入量(给定量或干扰)变化时，系统的输出变量由初始状态达到最终稳态的中间变化过程称过渡过程，又称瞬态过程。过渡过程结束后的输出响应称为稳态过程。系统的输出响应 $c(t)$ 由过渡过程和稳态过程组成。因此，系统控制性能的优劣，可以从动态过程 $c(t)$ 对 $r(t)$ 的比较中充分、直观地显示出来。

不同的控制对象、不同的工作方式和控制任务，对系统的品质指标要求也往往不相同。一般说来，对系统品质指标的基本要求可以归纳为三个字：稳、快、准。

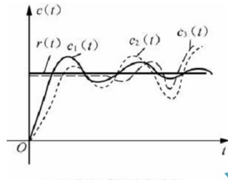


图 1.15　控制系统的动态过程

(1) 稳：指系统动态过程的稳定性。“稳”有两层含义：稳定和平稳。如果控制过程中出现被控量围绕给定量振荡，而振荡不十分激烈且逐渐减弱，如图 1.15 中的曲线 $c_1(t)$，则说明系统具有稳定性。若控制过程呈曲线 $c_2(t)$ 和曲线 $c_3(t)$ 的振荡或发散变化，则系统是不稳定的。稳定性是系统重新恢复平衡状态的能力。任何一个能够正常工作的控制系统，首先必须是稳定的。稳定是对自动控制系统的最基本要求。

平稳指系统由初始状态运动到新的平衡状态时，具有较小的过调和振荡性，即系统振荡的幅度和频率都不能过大。系统激烈而持久的振荡会导致功率元件过载，甚至使设备损坏而发生事故，这是绝不允许的。

(2) 快：指动态过程的快速性。振荡过程衰减很慢，或者虽然没有振荡，但被控量迟迟达不到平衡状态，都将使系统长时间地出现大偏差。过程的总体调节时间应有所限制，使动态过程尽快进入稳态。

“稳”和“快”反映了系统过渡过程的动态性能。既快又稳，则过程中被控量偏离给定值较小，偏离的时间短，表明系统动态精度高。动态性能是衡量系统质量高低的重要指标。

(3) 准：指动态过程的最终精度，是对系统稳态(静态)性能的要求。对一个稳定的系统而言，当过渡过程结束后，系统输出量的实际值与期望值之差称为稳态误差，它是衡量系统控制精度的重要指标。“准”，则误差小，控制精度高。

由于被控对象的具体情况不同，各种系统对三项性能指标的要求应有所侧重。例如，恒值系统一般对稳态性能限制比较严格，随动系统一般对动态性能要求较高。

同一个系统，上述三项性能指标之间往往是相互制约的。提高过程的快速性，可能会引起系统强烈振荡；改善了平稳性，控制过程又可能很迟缓，甚至使最终精度也很差。分析和解决这些矛盾，将是本课程讨论的重要内容。

【思考题】　对自动控制系统的性能要求是什么？

1.5 自动控制理论概要

1.5.1 自动控制理论的发展

自动控制理论是在人类征服自然的生产实践活动中孕育、产生，并随着社会生产和科学技术的进步而不断发展、完善起来的。

根据控制理论的理论基础及所能解决的问题的难易程度，可以把控制理论大体上分为三个不同的阶段：经典控制理论、现代控制理论和大系统及智能控制理论。这种阶段性的发展过程是由简单到复杂、由量变到质变的辩证发展过程。

1. 经典控制理论阶段(20 世纪 50 年代末以前)

经典控制理论，是以微分方程、传递函数为数学模型，在时域、频率域对单输入—单输出控制系统进行分析与设计的理论。基于频率域内传递函数的“反馈”和“前馈”控制思想，经典控制理论运用频率特性分析法、根轨迹分析法、描述函数法、相平面法、波波夫法等来解决系统稳定性问题。

早在古代，劳动人民就凭借生产实践中积累的丰富经验和对反馈概念的直观认识，发明了许多闪烁控制理论智慧火花的杰作。例如，我国北宋时代(公元 1086—1089 年)苏颂和韩公廉利用天衡装置制造的水运仪象台，就是一个按负反馈原理构成的闭环非线性自动控制系统；1681 年法国物理学家、发明家 D. 巴本 （D. Papin） 发明了用作安全调节装置的锅炉压力调节器；1765 年俄国人 I. 普尔佐诺夫(I. Polzunov)发明了蒸汽锅炉水位调节器，等等。

1788 年，英国人 J. 瓦特(J. Watt)在他发明的蒸汽机上使用了离心调速器，解决了蒸汽机的速度控制问题，引起了人们对控制技术的重视。以后人们曾经试图改善调速器的准确性，却常常导致系统产生振荡。

实践中出现的问题，促使科学家们从理论上进行探索研究。1868 年，英国物理学家 J. C. 马克斯韦尔(J. C. Maxwell)通过对调速系统线性常微分方程的建立和分析，解释了瓦特速度控制系统中出现的不稳定问题，开辟了用数学方法研究控制系统的途径。此后，英国数学家 E. J. 劳斯(E. J. Routh)和德国数学家 A. 赫维茨(A. Hurwitz)分别在 1877 年和 1895 年独立地建立了直接根据代数方程的系数判别系统稳定性的准则。这些方法奠定了经典控制理论中时域分析法的基础。

1932 年，美国物理学家 H. 奈奎斯特(H. Nyquist)研究了长距离电话线信号传输中出现的失真问题，运用复变函数理论建立了以频率特性为基础的稳定性判据，奠定了频率响应法的基础。随后，H. W. 伯德(H. W. Bode)和 N. B. 尼科尔斯(N. B. Nichols)在 20 世纪 30 年代末和 40 年代初进一步将频率响应法加以发展，形成了经典控制理论的频域分析法。为工程技术人员提供了一个设计反馈控制系统的有效工具。

第二次世界大战期间，反馈控制方法被广泛用于设计研制飞机自动驾驶仪、火炮定位系统、雷达天线控制系统以及其他军用系统。这些系统的复杂性和对快速跟踪、精确控制的高性能追求，迫切要求拓展已有的控制技术，促使了许多新的见解和方法的产生。同时，还促进了对非线性系统、采样系统以及随机控制系统的研究。

1948 年，美国科学家 W. R. 埃文斯(W. R. Evans)创立了根轨迹分析法，为分析系统性能随系统参数变化的规律性提供了有力工具，被广泛应用于反馈控制系统的分析、设计中。

以传递函数作为描述系统的数学模型，以时域分析法、根轨迹分析法和频域特性法为主要分析设计工具，构成了经典控制理论的基本框架。到 20 世纪 50 年代，经典控制理论发展到相当成熟的地步，形成了相对完整的理论体系，为指导当时的控制工程实践发挥了极大的作用。其中最突出的成果是 PID 控制规律的产生。PID 控制原理简单易于实现，具有一定的自适应性与鲁棒性，对于无时间延迟的单回路控制系统很有效，在工业过程控制中仍然被广泛应用。

经典控制理论研究的对象基本上是以线性定常系统为主的单输入—单输出系统，还不能解决如时变参数问题，多变量、强耦合等复杂的控制问题。

2. 现代控制理论阶段(50 年代末至 70 年代初)

现代控制理论，基于时域内的状态空间分析法，对多输入—多输出系统，系统可以是线性或非线性，定常或时变的，单变量与多变量以及连续与离散系统进行最优化控制的研究。通过时域内的状态方程与输出方程对系统内的状态变量进行控制，运用极点配置、状态反馈、输出反馈的方法，解决最优化控制、随机控制、自适应控制问题。

20 世纪 50 年代中期，空间技术的发展迫切要求解决更复杂的多变量系统、非线性系统的最优控制问题(如火箭和宇航器的导航、跟踪和着陆过程中的高精度，低消耗控制)。实践的需求推动了控制理论的进步，同时，计算机技术的发展也从计算手段上为控制理论的发展提供了条件，适合于描述航天器的运动规律，又便于计算机求解的状态空间描述成为主要的模型形式。俄国数学家 A. M. 李雅普诺夫(A. M. Lyapunov) 1892 年创立的稳定性理论被引用到控制中。1956 年，苏联科学家 L. S. 庞特里亚金(L. S. Pontryagin)提出极大值原理；同年，美国数学家 R. 贝尔曼(R. Bellman)创立了动态规划。极大值原理和动态规划为解决最优控制问题提供了理论工具。1959 年美国数学家 R. 卡尔曼(R. Kalman)提出了著名的卡尔曼滤波器，1960 年卡尔曼又提出系统的可控性和可观测性问题。到 20 世纪 60 年代初，一套以状态方程作为描述系统的数学模型，以最优控制和卡尔曼滤波为核心的控制系统分析、设计的新原理和方法基本确定，现代控制理论应运而生。

现代控制理论主要利用计算机作为系统建模分析、设计乃至控制的手段，适用于多变量、非线性、时变系统，在航空、航天、制导与控制中创造了辉煌的成就，使人类迈向宇宙的梦想变为现实。

3. 大系统理论阶段与智能控制理论阶段(70 年代初至现在)

大系统理论是指规模庞大、结构复杂、变量众多、关联严重、信息不完备的信息与控制系统。智能控制系统是具有某些仿人智能的工程控制与信息处理系统，其中最典型的是智能机器人。

为了解决现代控制理论在工业生产过程应用中所遇到的被控对象精确状态空间模型不易建立、合适的最优性能指标难以构造、所得最优控制器往往过于复杂等问题，科学

家们不懈努力，近几十年不断提出一些新的控制方法和理论。

20 世纪 60 年代初，F. W. 史密斯（F. W. Smith）提出采用性能模式识别器来学习最优控制法以解决复杂系统的控制问题。1965 年 L. A. 托德（L. A. Zadeh）创立模糊集合论，为解决负载系统的控制问题提供了强有力的数学工具。1966 年，门德尔（Mendel）提出了“人工智能控制”的概念。1967 年，Leondes 和门德尔（Mendel）正式使用“智能控制”，标志着智能控制思路已经形成。20 世纪 70 年代初期，傅京孙、Gloriso 和 Saridis 提出分级递阶智能控制，并成功应用于核反应、城市交通控制领域。20 世纪 70 年代中期，Mamdani 创立基于模糊语言描述控制规则的模糊控制器，并成功用于工业控制。20 世纪 80 年代以来，专家系统、神经网络理论及应用对智能控制起着促进作用。

控制理论目前还在向更纵深、更广阔的领域发展，无论在数学工具、理论基础，还是在研究方法上都产生了实质性的飞跃，在信息与控制学科研究中注入了蓬勃的生命力，启发并扩展了人的思维方式，引导人们去探讨自然界更为深刻的运动机理。控制理论的深入发展，必将有力地推动社会生产力的发展，提高人民的生活水平，促进人类社会的向前发展。

1.5.2 本书内容及实际应用问题

自动控制理论研究的对象是自动控制系统，主要是反馈系统；研究的中心问题是动态过程的稳、快、准。

问题又分为两个方面：一是给定一个控制系统，如何从理论上对其动态性能进行定性分析和定量估算；二是给定系统的性能要求，如何根据受控对象的特点，合理确定控制装置的部分结构、参数。本书的后面章节将介绍若干带有普遍意义的概念和理论以及一些实用的工程分析、计算方法。

第 2 章为自动控制系统的数学模型，主要介绍数学模型建立的一般方法、数学模型的形式以及几种数学模型之间的相互转换。在建立了系统的数学模型之后，就可以求得已知输入信号作用下系统的输出响应，据此，可对系统的性能做出定性分析和定量计算。本书的第 3 章、第 4 章和第 5 章针对线性定常系统给出了常用的时域分析法、根轨迹分析法和频率特性法。

当调整系统的参数不能同时满足系统的各项性能指标要求时，就要在系统中附加一些装置，改变系统结构，从而改变性能，使之满足工程要求，这种措施我们称之为系统的校正。第 6 章是控制系统的设计与校正，是为解决这一问题而设置的。本章将介绍根据系统固有部分的性能和对系统性能指标的要求，确定校正装置的结构和参数的方法。

近年来，随着数字技术、计算机技术的迅速发展，采样控制系统得到了广泛的应用。基于工程实践的需要，作为分析和设计数字控制系统的理论基础，采样系统理念的发展十分迅速。第 7 章主要讨论信号的采样和复现，介绍 Z 变换和离散系统的数学模型：差分方程、脉冲传递函数，分析离散系统的动态、稳态过程。

严格地说，理想的线性系统是不存在的，实际控制系统中的环节或元件在不同程度上都具有非线性，所以，实际的控制系统都是非线性系统。第 8 章主要介绍了非线性系统的特点、典型的非线性特性及其描述函数，并介绍了用描述函数和相平面分析

非线性系统的方法。

小　结

控制——主动干预、管理、操纵之意。

自动控制——利用控制装置操纵受控对象，使其被控量按技术要求（即给定量）运行。

自动控制系统——受控对象和控制装置的总体。

受控对象——指具体的生产设备或工作机械、设备，是自控系统的主体，其主要工况参数就是被控量。系统性能好坏，归根结底是看这些工况参数在运行中是否符合要求。

受控对象可以是很复杂、庞大的设备，如轧机、电冶炉、发电机组、化学反应塔、船闸、机床、巨轮、飞机、反应堆；也可能是很小的机构，如记录仪、录像机磁头、指针等。

控制装置——指除受控对象之外自控系统中的其他部分。一般具有信号的测量、计算、放大和执行等功能。

常见的控制方式有两种：开环和闭环。

对控制系统的要求是稳、快、准。

控制理论大致上可分为经典控制理论和现代控制理论。经典控制理论主要用于线性单输入—单输出系统的分析，常用的分析方法有时域法、根轨迹法和频率特性法。现代控制理论以状态空间为数学模型，借助计算机对非线性、多变量系统的系统进行分析和研究。

一些新型的智能控制系统，也都是在基本控制方式的基础上发展出来的。例如，怎样使动态测量更准确，怎样对受控对象内部特性变化了解得更清楚，又怎样实现更灵活的对某些技术指标来说是最好的控制，即所谓最佳滤波和辨识、自适应控制、最优控制等，就是通过装置中计算机的复杂算法来实现的。

习　题

1. 简述自动控制系统的基本构成，画出其组成方框图，并说明各部分的作用。

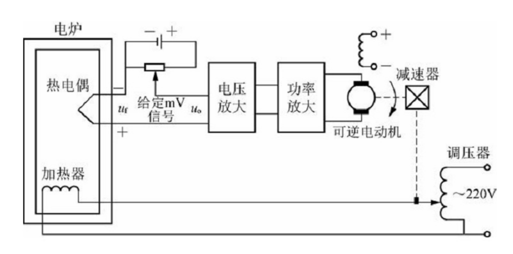
2. 试列举开环控制和闭环控制的例子，并说明其工作原理。

3. 炉温控制系统如题图 1.1 所示，要求：

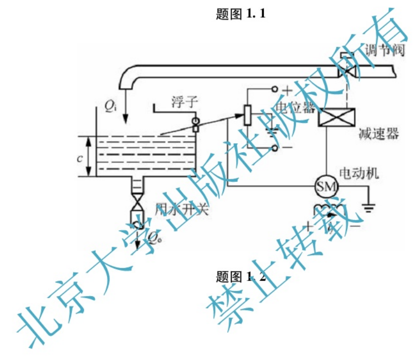
(1) 指出系统输出量、给定输入量、扰动输入量、被控对象和自动控制器的各组成部分，并画出其方框图；

(2) 说明该系统是怎样消除或减少偏差的。

4. 题图 1.2 所示为液位自动控制系统原理示意图。在任何情况下，希望液面高度 c 维持不变，要求：指出系统的输入量(包括给定输入和扰动输入量)和输出量，画出系统方框图并说明系统工作原理。

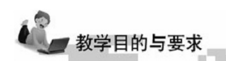

电炉
热电偶
加热器
给定mV
信号
电压
放大
功率
放大
可逆电动机
减速器
调压器
~220V

题图 1. 1


调节阀
浮子
电位器
减速器
电动机
SM
用水开关

题图 1. 2

第2章 控制系统的数学模型



教学目的与要求

1. 掌握控制系统微分方程的建立方法。
2. 掌握非线性系统的线性化方法。
3. 理解传递函数的概念，掌握典型元部件的传递函数。
4. 掌握绘制结构图的步骤及其等效变换与化简。
5. 掌握由梅森公式求传递函数的方法。
6. 掌握反馈控制系统传递函数的概念和求取方法。
7. 了解 MATLAB 处理系统数学模型的方法。



知识结构

- 控制系统的数学模型
  - 控制系统微分方程的建立方法
  - 非线性系统的线性化方法
  - 控制系统的传递函数
    - 传递函数的概念
    - 传递函数的性质
    - 典型环节的传递函数
  - 控制系统动态结构图
    - 结构图的组成和特点
    - 结构图建立方法
    - 结构图的化简
    - 梅森增益公式
  - 闭环控制系统的传递函数
  - 用MATLAB处理系统数学模型

自动控制理论的研究对象是自动控制系统。把握系统的动态过程对自动控制系统的分析和计算是非常必要的。但是，仅仅依据系统的工作原理图和一些结构、参数资料，是无法直接且直观地辨识动态过程的。尽管如此，系统在动态运行中，还是可以通过对工作原理的了解和掌握的基本物理定律，如牛顿第二定律、能量守恒定律、传热定律、基尔霍夫定律等，建立起受控对象内部以及控制装置各部件的有关变量、变量的速度和加速度之间的相互关系，这通常是一些微分方程，求解这些微分方程，便可得到动态过程。

描述系统（部件或装置）内部各动态变量之间关系的数学表达式，称为系统的数学模型。系统的数学模型有多种，常用的有微分方程、传递函数、动态结构图、频率特性等。在分析系统性能之前，必须先建立系统的数学模型。

建立系统的数学模型的方法有解析法和实验法两种。解析法是根据系统所遵循的物理定律，经过数学推导，得到数学模型。实验法是在系统的输入端加上一定形式的试验信号，通过实验测出系统输出信号，再根据输入、输出特性确定数学模型。本章主要介绍用解析法建立数学模型的方法以及几种数学模型之间的转换。

2.1 控制系统的微分方程

2.1.1 列写微分方程的一般方法

微分方程的列写应根据组成系统各元件工作过程中所遵循的物理定理来进行。例如，电路中的基尔霍夫电路定理、力学中的牛顿定理、热力学中的热力学定理等。

建立系统(或元件、对象)的微分方程，一般步骤如下：

(1) 根据系统(或元件、对象)的工作原理，确定其输入量和输出量。

(2) 根据系统中元件的具体情况，按照它们所遵循的科学规律(物理或化学定律等)，围绕输入量、输出量及有关中间量，列写原始微分方程组。

(3) 消去中间变量，得到只含有输出量和输入量及其各阶导数的微分方程，该微分方程表示了系统输出量和输入量之间的关系，是系统的时域数学模型。一般情况下，应将微分方程写成标准形式，即与输出量有关的各项写在方程的左端，与输入量有关的各项写在方程的右端，方程两端变量的导数项的阶次均按由高到低的顺序排列。

现举例说明控制系统建立微分方程的过程。

1. 电学系统

【例 2-1】 图 2.1 是由电感 L、电阻 R 和电容 C 串联组成的无源网络，其中 $u_i(t)$ 是输入电压，$u_o(t)$ 是输出电压，列写该电路的微分方程式。

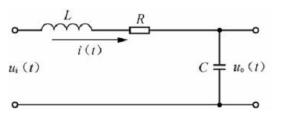


图 2.1 *RLC* 无源网络

解：设电路中的电流为 $i(t)$，参考方向如图 2.1 所示。根据基尔霍夫电压定律，可以得到回路电压平衡方程式为

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+u_o(t)=u_i(t) \tag{2-1}$$

式中 $i(t)$ 是中间变量，它与输出电压 $u_o(t)$ 的关系为

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-2}$$

将式(2-2)代入式(2-1)，消去中间变量 $i(t)$，得到

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_o(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t}+u_o(t)=u_i(t) \tag{2-3}$$

可见，式(2-3)是典型的二阶线性常系数微分方程，对应的系统 RLC 串联电路也称为二阶线性定常系统。

2. 力学系统

力学系统即机械系统，指的是存在机械装置的系统，它们遵循物理学的力学定律。机械运动包括机械平移运动(即直线运动，相应的位移称为线位移)和机械旋转运动(即转动，相应的位移称为角位移)两种。

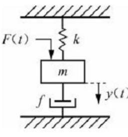


图 2.2　力学系统
(机械位移系统)

【例 2-2】 图 2.2 所示为一个弹簧-质量-阻尼器组成的直线运动的力学系统。图 2.2 中，m 为物体质量，k 为弹簧系数，f 为黏性摩擦系数，$F(t)$ 为物体受到的外作用力，$y(t)$ 为物体的位移。试列写出以 $F(t)$ 为输入量、$y(t)$ 为输出量的系统的运动方程。

解： 如图 2.2 所示，$F(t)$ 和 $y(t)$ 的方向均取竖直向下。设当外作用力 $F(t)=0$ 时，物体的平衡位置为位移 $y(t)$ 的零点。该物体受到四个力的作用，即外力 $F(t)$，弹簧的弹力 F_k，黏性摩擦力 F_f 以及重力 mg。F_k、F_f 向上为负。由牛顿第二定律得到

$$\sum F=F(t)-F_k-F_f+mg=m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{2-4}$$

其中，弹簧的弹力 F_k 为

$$F_k=k[y(t)+y_0]$$

黏性摩擦力 F_f 为

$$F_f=f\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

式中 y_0 是外力 $F(t)=0$、物体处于平衡位置时弹簧的初始伸长量，而且有 $ky_0=mg$。将以上结果代入式(2-4)中，得到系统的运动方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+f\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ky(t)=F(t) \tag{2-5}$$

可见，该力学系统是二阶线性常系数微分方程。

3. 他励直流电动机

【例 2-3】 图 2.3 所示为一台磁场恒定(励磁电流 I_f=常数)，用电枢电压控制的直流电动机。假设它的控制输入为电枢电压 $u(t)$，输出量为电动机的转速 n。试列写出其输入与输出之间的运动方程。

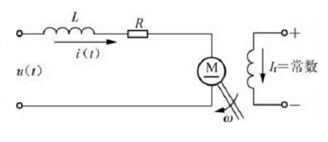


图 2.3　他励直流电动机原理图

解： 根据基尔霍夫电压定律可以列写

出电枢回路的电压平衡方程式为

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+e(t)=u(t) \tag{2-6}$$

式中 L 为直流电动机电枢回路的电感，单位为 H；R 为电枢回路的电阻，单位为 Ω；$i(t)$ 为电枢回路的电流，单位为 A；$u(t)$ 为加在电枢两端的电压，单位为 V；$e(t)$ 是电动机的反电动势，单位为 V。

电动机的转矩平衡方程式为

$$\sum T=T_{\mathrm{e}}-T_{L}=\frac{GD^{2}\mathrm{d}n}{375\,\mathrm{d}t} \tag{2-7}$$

式(2-7)中 T_{e} 是电磁转矩，单位为 N·m；T_L 是电动机的负载转矩，单位为 N·m；GD^2 是电动机转动部分的转动惯量，单位为 kg·m^2。

反电动势方程为

$$e(t)=C_{\mathrm{e}}n \tag{2-8}$$

式中 C_{e} 是额定磁通下电动机的电动势转速比，也称电动势系数，是由电动机的结构和参数决定的，单位为 V·s。

电磁转矩方程为

$$T_{\mathrm{e}}=C_{\mathrm{m}}i(t) \tag{2-9}$$

式中 C_{m} 是额定磁通下电动机的转矩电流比，也称电磁转矩系数，也是由电动机的结构和参数决定的，单位为 N·m/A。

将式（2-6）～式（2-9）联立，在理想空载情况下（$T_L=0$），消去中间变量$i(t)$、$e(t)$、T_{e}，可以得到描述电枢电压控制的直流电动机的输入电压 $u(t)$ 与输出速度 n 之间相互关系的运动方程式为

$$\frac{L}{R}\frac{GD^{2}}{375}\frac{R}{C_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{d}^{2}n}{\mathrm{d}t^{2}}+\frac{GD^{2}}{375}\frac{R}{C_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+n=\frac{1}{C_{\mathrm{e}}}u(t) \tag{2-10}$$

或

$$T_{\mathrm{m}}T_{1}\frac{\mathrm{d}^{2}n}{\mathrm{d}t^{2}}+T_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+n=\frac{1}{C_{\mathrm{e}}}u(t) \tag{2-11}$$

式中 $T_{\mathrm{m}}=\frac{GD^{2}}{375}\frac{R}{C_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{m}}}$是电动机的机电时间常数，单位为 s；$T_1=\frac{L}{R}$是电动机电枢回路的电磁时间常数，单位为 s。

可见，电枢电压控制的直流电动机的转速与电枢电压的关系式是一个二阶线性常系数微分方程，说明它是一个二阶线性定常系统。

由于系统中的电动机电枢回路的电感 L 比较小，为了分析方便和简化，有时可以忽略它的影响，这样可以得到一阶线性微分方程，即

$$T_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+n=\frac{1}{C_{\mathrm{e}}}u(t) \tag{2-12}$$

从上面的举例可以发现，不同类型的物理系统或元件可以具有形式相同的运动方程，称这些系统为相似系统。相似系统揭示了不同物理现象之间的相似关系，便于我们使用一个简单系统去研究与其相似的复杂系统，也为控制系统的计算机数字仿真奠定了基础。



2.1.2 系统微分方程的建立

建立控制系统的微分方程时，一般先由系统原理图画出系统方框图，并分别列写组成系统的各元件的微分方程；然后消去中间变量，便得到描述系统输出量和输入量之间关系的微分方程。列写系统各元件的微分方程时，应注意以下两点：

（1）信号传递的单向性，即前一个元件的输出是后一个元件的输入，一级一级地单向传送。

（2）前后连接的两个元件中，后级对前级的负载效应。例如，无源网络输入阻抗对前级的影响，齿轮系对电动机转动惯量的影响等。

【例 2-4】 试列写出图 2.4 所示速度闭环控制系统的微分方程。

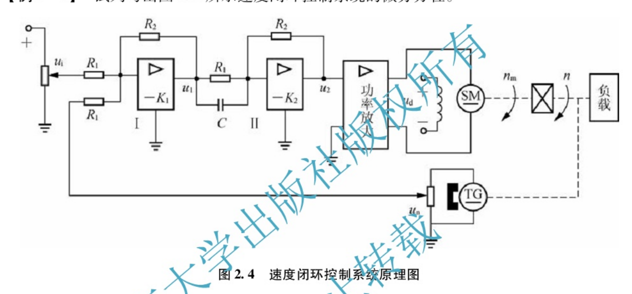


图 2.4 速度闭环控制系统原理图

解： 控制系统的被控对象是电动机(带负载)，系统的输入量是 u_i，输出量是转速 n。控制系统由给定电位器、运算放大器Ⅰ(含比较作用)、运算放大器Ⅱ(含 RC 校正网络)、功率放大器、直流电动机、测速发电机、减速器等几部分组成。现分别列写各环节的微分方程。

（1）运算放大器Ⅰ。输入量(即给定电压)u_i 与速度反馈电压 u_n 在此合成，产生偏差电压并经放大，得到运算放大器Ⅰ的输出，即

$$u_1 = K_1(u_i - u_n) = K_1 \Delta u_n \tag{2-13}$$

式中 $K_1 = R_2/R_1$ 是运算放大器Ⅰ的比例放大系数。

（2）运算放大器Ⅱ。考虑 RC 校正网络，u_2 与 u_1 之间的微分方程为

$$u_2 = K_2\left(\tau \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\right) \tag{2-14}$$

式中 $K_2 = R_2/R_1$ 是运算放大器Ⅱ的比例放大系数，$\tau = R_1 C$ 是微分时间常数。

（3）功率放大器。本系统采用晶闸管整流装置，它包括触发电路和晶闸管主回路。忽略晶闸管控制电路的时间滞后，其输入输出方程为

$$u_d = K_3 U_2 \tag{2-15}$$

式中 K_3 是比例系数。

（4）齿轮系环节。设齿轮系的速比为 i，则电动机的转速 n_m 经齿轮系减速后变为

n，即

$$n = \frac{1}{i}n_{\mathrm{m}} \tag{2-16}$$

（5）反馈环节。测速发电机的输出电压 u_{n} 与其转速 n 成正比，即

$$u_{\mathrm{n}} = K_{\mathrm{n}}n \tag{2-17}$$

式中 K_{n} 是测速发电机的比例系数。

（6）直流电动机。利用例 2-3 的结果，考虑负载转矩 T_L（忽略空载转矩），可得到直流电动机的微分方程为

$$T_{\mathrm{m}}T_1\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}t^2} + T_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + n = \frac{1}{C_{\mathrm{e}}}u_{\mathrm{d}}(t) - C_{\mathrm{m}}\left(T_1\frac{\mathrm{d}T_L}{\mathrm{d}t} + T_L\right) \tag{2-18}$$

式中 $C_{\mathrm{m}} = \dfrac{R}{C_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{m}}}$是转速与负载传递系数。

综上所述，线性系统微分方程的列写步骤：

（1）确定系统和各元部件的输入量和输出量。

（2）对系统中每一个元件建立输入、输出的动态联系。

（3）对上述方程进行适当的简化，如略去一些对系统影响小的次要因素，对非线性元部件进行线性化等。

（4）从系统的输入端开始，按照信号的传递顺序，在所有元部件的方程中消去中间变量，最后得到描述系统输入和输出关系的微分方程。

2.1.3 线性微分方程的解

通过以上建立微分方程的几个例子可知，系统的微分方程由输出量的各阶导数和输入量的各阶导数以及系统的一些参数构成。不同类型的环节和系统可以有形式相同的微分方程。

一般地，n 阶线性定常系统可用 n 阶线性定常微分方程描述，即

$$\begin{aligned} & a_0\frac{\mathrm{d}^n c(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}c(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} + a_n c(t) \\ = & b_0\frac{\mathrm{d}^m r(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_1\frac{\mathrm{d}^{m-1}r(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (n \geqslant m) \tag{2-19}$$

式中 $c(t)$ 为输出量；$r(t)$ 为输入量；a_0，a_1，…，a_n 及 b_0，b_1，…，b_m 均为由系统结构和参数决定的常系数。

为了从理论上对系统的动态过程进行分析，建立系统微分方程后，还须对其求解。在工程实践中，常采用拉氏变换法求解线性常微分方程，基本思路和方法是：

线性微分方程（时域 t） —拉氏变换→ 代数方程（复数域 s）

↓求解

微分方程的解（时域 t） ←拉氏反变换— 代数方程的解（复数域 s）

关于拉氏反变换以及用拉氏变换法求解线性常微分方程等内容在《复变函数》中已经介绍过，本书不再赘述，常用函数的拉氏变换对照表见附录 A。这里通过举例说明求解线性常微分方程的方法。



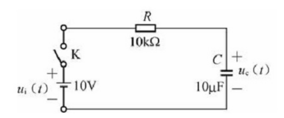


图 2.5　*RC* 滤波电路

【例 2-5】 *RC* 滤波电路如图 2.5 所示，输入电压信号 $u_i(t)=10\text{V}$，电容器的初始电压为 2V，求当 $t=0$ 时刻开关 K 闭合后电容上电压的变化规律。

解： *RC* 滤波电路的微分方程为

$$RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u_i(t)$$

对方程两边进行拉氏变换得

$$RC[sU_c(s)-u_c(0)]+U_c(s)=U_i(s)$$

将 $R=10\text{k}\Omega$，$C=10\mu\text{F}$，$u_c(0)=2\text{V}$，$U_i(s)=10/s$，代入上式得

$$(0.1s+1)U_c(s)=\frac{0.2s+10}{s}$$

则输出的拉氏变换为

$$U_c(s)=\frac{0.2s+10}{s(0.1s+1)}$$

对上式进行部分分式展开得

$$U_c(s)=\frac{0.2s+10}{s(0.1s+1)}=\frac{2s+100}{s(s+10)}=\frac{10}{s}-\frac{8}{s+10}$$

对上式取拉氏反变换，得到电容两端电压变化的时间函数为

$$u_c(t)=10\cdot 1(t)-8\mathrm{e}^{-10t}=10\cdot(1-0.8\mathrm{e}^{-10t})$$

采用拉氏变换法求解微分方程的步骤如下：

（1）对微分方程的两边取拉氏变换。

（2）将给定的初始条件代入取拉氏变换后的方程。

（3）写出输出量的拉氏变换。

（4）进行拉氏反变换，求出系统输出的时间函数。

【思考题】　利用解析法建立系统微分方程的步骤是什么？

2.2　非线性方程的线性化

以上讨论的系统都是可以用线性常微分方程描述的，称为线性定常系统。线性系统的重要性质是可以应用叠加原理，即具有叠加性和齐次性。

（1）叠加性：如果线性系统对输入信号 $x_1(t)$ 的响应为 $y_1(t)$，对输入信号 $x_2(t)$ 的响应为 $y_2(t)$，则线性系统对输入信号 $x_1(t)+x_2(t)$ 的响应为 $y_1(t)+y_2(t)$。

（2）齐次性：如果线性系统对输入信号 $x(t)$ 的响应为 $y(t)$，β 为常数，则线性系统对输入信号 $\beta x(t)$ 的响应为 $\beta y(t)$。齐次性又称比例性。

但是，严格地讲，几乎所有的实际电路元件和系统的输入量和输出量之间都存在不同程度的非线性，因此，它们的运动方程应是非线性微分方程。对于高阶非线性微分方程，在数学上不能求得一般形式的解，因而对于非线性元件或系统的研究在理论上很困难。然而对于许多元件或系统来说，在比较小的范围运动，如果把它们的输入量和输出量之间的非线性看作线性关系，是不会产生很大误差的。也就是说，许多非线性系统在

一定条件下，可以近似地视为线性系统。这种有条件地把非线性系统用近似的线性方程代替，进行处理的方法称为非线性系统的线性化。线性化的关键是将其中的非线性函数线性化。在建立系统数学模型的过程中，线性化方法是一种常见的、有效的方法。

工程上常用的线性化方法是小偏差线性化，常用的线性化方法是利用数学分析中的泰勒级数。在控制系统中，都有一个稳定的工作状态以及与之对应的工作点，称之为平衡状态或平衡点。由数学的级数理论可知，若非线性函数在给定区域内存在各阶导数，则可在工作点的邻域将非线性函数展开为泰勒级数。当变化的范围很小时，可略去二阶以上的高阶项，得到线性化方程。

设非线性元件的输入输出关系为

$$y(t)=g[x(t)] \tag{2-20}$$

式中 $g[x(t)]$ 表示 $y(t)$ 是 $x(t)$ 的函数。

设系统的正常工作点为 x_0，若非线性函数连续，且其各阶导数存在，则可在工作点附近按泰勒级数展开

$$y(t)=g[x(t)]=g(x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\frac{x-x_0}{1!}+\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots$$

当 $x-x_0$ 在很小范围内波动时，略去高于一次的小增量项，该方程可简化为

$$y(t)=g[x(t)]=g(x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x-x_0)=y_0+m(x-x_0)$$

式中 m 为工作点处的斜率。

最后可改写成线性方程

$$(y-y_0)=m(x-x_0)$$

或

$$\Delta y=m\Delta x \tag{2-21}$$

式(2-21)即为式(2-20)的线性化方程。

【例 2-6】 单摆系统运动的示意图如图 2.6 所示，写出其运动方程并求其线性化方程。

解：设摆球质量为 m，摆长为 l，摆角为 θ，则摆球运动的弧长为 $l\cdot\theta$；摆球运动时媒质的阻尼系数为 μ。根据运动定律可以直接导出该系统的运动方程为

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\mu l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+mg\sin\theta=0 \tag{2-22}$$

式中 g 为重力加速度，$g=9.8\mathrm{m/s^2}$。

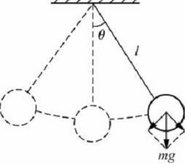


图 2.6 单摆系统运动示意图

式(2-22)是一个二阶微分方程。由于方程中的零阶导数项含有非线性函数 $\sin\theta$ 形式，因此该方程是一个二阶非线性微分方程。下面对该非线性方程进行线性化。

对于非线性函数 $\sin\theta$ 线性化，令 $\varphi=\sin\theta$，在 $\theta_0=0$ 的邻域，其泰勒级数展开式为

$$\varphi=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots$$

忽略二阶以上高阶项，其线性关系为 $\varphi=\theta$，则

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\theta}{dt},\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

将以上结果代入式(2-22)即可得到线性化方程为

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mu l\frac{d\varphi}{dt}+mg\varphi=0 \tag{2-23}$$

或者在式(2-22)中，将 $\theta=\theta_0+\Delta\theta$ 代入，可得到

$$ml\frac{d^2}{dt^2}(\theta_0+\Delta\theta)+\mu l\frac{d}{dt}(\theta_0+\Delta\theta)+mg\sin(\theta_0+\Delta\theta)=0 \tag{2-24}$$

选择平衡点 $\theta_0=0$，即$\frac{d\theta_0}{dt}=0$，$\frac{d^2\theta_0}{dt^2}=0$，则有

$$ml\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\mu l\frac{d\theta_0}{dt}+mg\sin\theta_0=0$$

又在 $\theta_0=0$ 时，有

$$\sin(\theta_0+\Delta\theta)=\sin\theta_0\cos\Delta\theta+\cos\theta_0\sin\Delta\theta=\sin\Delta\theta$$

而当 $\Delta\theta$ 很小时，$\sin\Delta\theta\approx\Delta\theta$，故有

$$ml\frac{d^2(\Delta\theta)}{dt^2}+\mu l\frac{d(\Delta\theta)}{dt}+mg\Delta\theta=0 \tag{2-25}$$

结果与式(2-23)相同，只是变量 φ 和 $\Delta\theta$ 的区别。

在处理非线性系统的线性化时，要注意以下几点：

(1) 线性化方程中的参数与选择的工作点有关，工作点不同时，相应的参数也不同。因此，在进行线性化时，应首先确定工作点。

(2) 线性化的条件是输入量在小范围内变化，当输入量的变化范围较大时，用上述方法建立线性化模型势必引起较大的误差。所以，在进行线性化时要注意条件，包括信号的变化范围。

(3) 若非线性特性是不连续的，由于在不连续点的邻域不能得到收敛的泰勒级数，因此不能采用上述方法。这类非线性称为本质非线性，处理方法见本书第 8 章。

【思考题】 什么是线性定常系统？线性系统具有什么特性？

2.3 控制系统的传递函数

用拉氏变换法求解线性系统的微分方程时，可以得到控制系统在复数域中的数学模型——传递函数。传递函数不仅可以表征系统的动态性能，而且可以用来研究系统的结构或参数变化对系统的影响。因此，传递函数是经典控制理论中最基本也是最重要的概念。

2.3.1 传递函数的概念及性质

1. 传递函数的概念

系统的方框图如图 2.7 所示，$r(t)$为系统的输入量，$R(s)$为 $r(t)$的拉氏变换；$c(t)$为系统的输出量，$C(s)$为 $c(t)$的拉氏变换。

线性定常系统的传递函数，定义为在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。传递函数之比，可用 $G(s)$ 表示，即

图2.7 系统方框图

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

对于 n 阶线性定常系统，设初始条件为零，对式(2-19)两边取拉氏变换，得

$$(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)C(s)$$
$$=(b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m)R(s)$$

由此，可得到系统传递函数的一般表达式

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\quad(n\geqslant m)\tag{2-26}$$

由推导过程可见，在零初始条件下，形式上只要将微分方程中的微分算符 $\frac{\mathrm{d}^{(i)}}{\mathrm{d}t^{(i)}}$ 换成相应的 $s^{(i)}$，输入与输出的时间函数 $r(t)$、$c(t)$ 改写成象函数 $R(s)$、$C(s)$，便可求得相应的传递函数。

【例2-7】 求例2-1中 RLC 无源网络的传递函数 $G(s)=U_\mathrm{o}(s)/U_\mathrm{i}(s)$。

解：RLC 网络的微分方程用式(2-3)表示为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t}+u_\mathrm{o}(t)=u_\mathrm{i}(t)$$

在零初始条件下，对该方程中各项求拉氏变换，得

$$(LCs^2+RCs+1)\ U_\mathrm{o}(s)=U_\mathrm{i}(s)$$

由传递函数定义，RLC 无源网络的传递函数为

$$G(s)=\frac{U_\mathrm{o}(s)}{U_\mathrm{i}(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

2. 传递函数的性质

(1) 传递函数的概念只适用于线性定常系统，它与线性常系数微分方程一一对应。

(2) 传递函数不能反映系统或元件的学科属性和物理性质。物理性质和学科类别截然不同的系统可能具有完全相同的传递函数，而研究某传递函数所得结论可适用于具有这种传递函数的各种系统。

(3) 传递函数仅与系统的结构和参数有关，与系统的输入无关。只反映输入和输出之间的关系，不反映中间变量的关系。

(4) 传递函数的概念主要适用于单输入—单输出系统。若系统有多个输入信号，在求传递函数时，除了一个有关的输入外，其他的输入量一概视为零。

(5) 传递函数忽略了初始条件的影响。

(6) 传递函数是 s 的有理分式，对实际系统而言，分母的阶次 n 大于或等于分子的阶次 m，此时称为 n 阶系统。

(7) 传递函数的分子多项式和分母多项式经因式分解后可写为

$$G(s)=\frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \quad (2-27)$$

令分子多项式等于0，求出的根 $z_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 称为传函函数的零点；令分母多项式等于零，解出的根 $p_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 称为传递函数的极点。传递函数的零点和极点可以是实数，也可以是复数。

在复数平面上表示传递函数的零点和极点的图形，称为传递函数的零极点分布图。在此类图中一般用“○”表示零点，用“×”表示极点。传递函数的零、极点分布图可以形象地反映系统的全面特性。传递函数的分母多项式就是相应微分方程的特征多项式，传递函数的极点就是微分方程的特征根，它决定了系统的动态过程。

2.3.2 典型环节的传递函数及其动态响应

控制系统是由各种元、部件有机组合而成的。从结构及作用原理上来看，有各种各样不同的元、部件，可能是机械的、电子的、液压的、光学的，或是其他类型的，但从动态性能或数学模型来看，却可分为为数不多的一些基本环节，也就是典型环节。不管控制系统如何复杂，只要掌握了典型环节传递函数的求取，就可方便地组成复杂的控制系统。

下面列举几种典型环节及其传递函数，这些环节是构成系统的基本环节。

1. 比例环节

比例环节的微分方程为

$$c(t)=Kr(t) \quad (2-28)$$

式中 K 为常数，称为放大倍数。

对式（2-28）取拉氏变换，得

$$C(s)=KR(s)$$

因此，比例环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=K \quad (2-29)$$

比例环节又称放大环节，它的输出量和输入量成正比，其传递函数是一个常数。它的方框图如图 2.8 所示。

比例环节的单位阶跃响应曲线如图 2.9 所示。

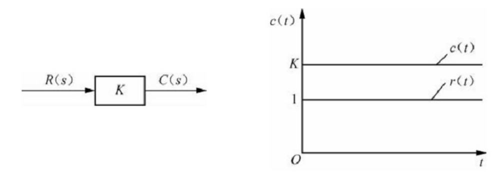


图 2.8 比例环节方框图　　图 2.9 比例环节的单位阶跃响应曲线

比例环节的特点是，其输出不失真、不延迟、成比例地复现输入信号的变化，即信号的传递没有惯性。

【例 2-8】 求图 2.10 所示电路的传递函数。

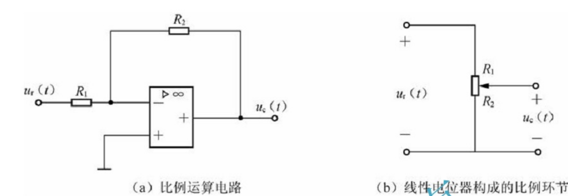


图 2.10　比例环节电路图

解： 图 2.10(a)为有源器件运算放大器构成的比例环节，其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=K=-\frac{R_2}{R_1}$$

注意，这里的负号表示运算放大器输出与输入反相。

图 2.10 (b)为线性电位器，其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

2. 惯性环节

惯性环节的微分方程为

$$T\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}+c(t)=Kr(t) \tag{2-30}$$

式中 K 为比例系数，T 为时间常数。

对式(2-30)取拉氏变换，得

$$TsC(s)+C(s)=KR(s)$$

因此，惯性环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{Ts+1} \tag{2-31}$$

式(2-31)称为惯性环节的标准式。惯性环节的方框图如图 2.11所示。

$R(s)$ → $\frac{K}{Ts+1}$ → $C(s)$

图 2.11　惯性环节方框图

设输入为单位阶跃信号，即 $r(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geqslant 0)\end{cases}$，其拉氏变换为 $R(s)=\frac{1}{s}$，输出响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}$$

拉氏反变换后，可得到单位阶跃响应为

$$c(t)=K(1-e^{-\frac{t}{T}}) \tag{2-32}$$

当 $K=1$ 时，惯性环节的单位阶跃响应曲线如图 2.12 所示。

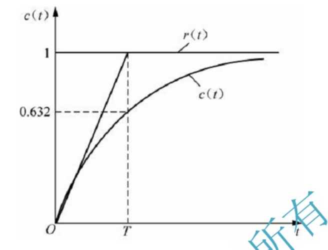


图 2.12　惯性环节的单位阶跃响应曲线

惯性环节的特点是，其输出量不能立即跟随输入量的变化，存在时间的延迟。环节的惯性越大，时间常数也越大，延迟的时间也就越长。

【例 2-9】　求图 2.13 所示电路的传递函数。

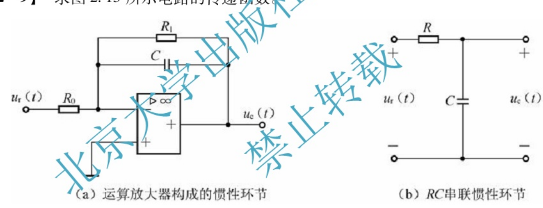


图 2.13　惯性环节电路图

解：图 2.13(a)为由运算放大器构成的惯性环节，因为

$$\frac{U_r(s)}{Z_1(s)}=-\frac{U_c(s)}{Z_2(s)}$$

式中 $Z_1(s)=R_0$，$Z_2(s)=\dfrac{R_1}{R_1Cs+1}$，所以其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=-\frac{R_1/R_0}{R_1Cs+1}$$

对照惯性环节的标准式，即有 $K=-\dfrac{R_1}{R_0}$，$T=R_1C$。

图 2.13(b)为 RC 串联电路，其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

这里，$K=1$，$T=RC$。

3. 积分环节

积分环节的微分方程为

$$T\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=r(t) \tag{2-33}$$

式中 T 为积分时间常数。

对式(2-33)取拉氏变换，得

$$TsC(s)=R(s)$$

因此，积分环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts} \tag{2-34}$$

积分环节的方框图如图 2.14 所示。

当 $R(s)=\frac{1}{s}$时，输出响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{1}{Ts}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{Ts^2}$$

$R(s)$ → $\boxed{\frac{1}{Ts}}$ → $C(s)$

图 2.14 积分环节方框图

拉氏反变换后，可得到积分环节的单位阶跃响应为

$$c(t)=\frac{1}{T}t \tag{2-35}$$

积分环节的单位阶跃响应曲线如图 2.15 所示。

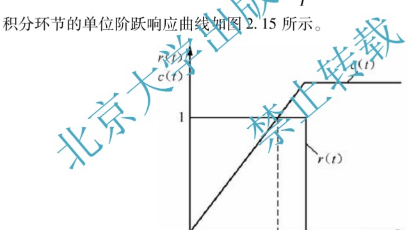


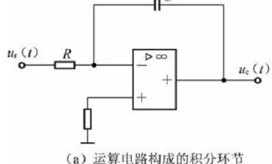
图 2.15 积分环节的单位阶跃响应曲线

积分环节的特点是，其输出量与输入量对时间的积分成正比。若输入突变，输出值要等时间 T 之后才等于输入值，故有滞后作用。当输入信号为零后，积分停止，积分环节的输出量将保持输入信号变为零时刻的值不变，故具有记忆功能。只有当输入反相时，输出才反相积分而下降。常利用积分环节来改善系统的稳态性能。

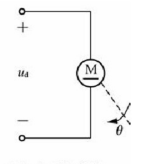
【例 2-10】 求图 2.16 所示电路的传递函数。

解：图 2.16(a)为由运算放大器构成的积分环节。因为有

$$\frac{U_r(s)}{R}=-\frac{U_c(s)}{1/Cs}$$



（a）运算电路构成的积分环节



（b）电动机电路

图 2.16　积分环节电路图

故其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=-\frac{1}{RCs}$$

图2.16(b)为忽略惯性和摩擦及电枢电感之后的电动机。电动机转子的角速度 ω 与转子转角 θ 之间的关系为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=Ku_d$$

式中 K 为比例系数。

对该式取拉氏变换并整理得

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{U_d(s)}=\frac{K}{s}$$

相当于积分环节。

4. 微分环节

理想微分环节的微分方程为

$$c(t)=T\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-36}$$

式中 T 为微分时间常数。

对式(2-36)取拉氏变换，得微分环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=Ts \tag{2-37}$$

理想微分环节的方框图如图2.17所示。

微分环节的单位阶跃响应应为

$$c(t)=T\delta(t) \tag{2-38}$$

其单位阶跃响应曲线如图2.18所示。

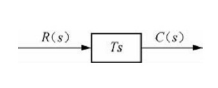
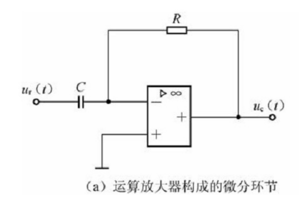


图 2.17　积分环节方框图

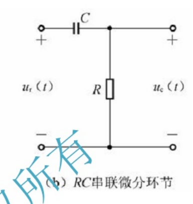
图 2.18　理想微分环节的单位阶跃响应曲线

由图 2.18 可知，在 $t=0$ 时，其输出应是一面积(强度)为 T，宽度为零，幅值无穷大的理想脉冲。对物理装置而言，意味着既要有一个能瞬间提供无穷大信号的能源，又要求装置中不存在任何惯性，显然，这在实际中是不可能实现的，即在实际的物理装置中，不存在理想的微分环节。

【例 2-11】 求图 2.19 所示电路的传递函数。



(a) 运算放大器构成的微分环节



(b) RC串联微分环节

图 2.19 微分环节电路图

解： 图 2.19(a)为由运算放大器构成的微分环节。因为有

$$\frac{U_r(s)}{1/Cs}=-\frac{U_c(s)}{R}$$

故其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=-RCs$$

这是一个近似理想的微分环节。

图 2.19(b)为 RC 电路构成的微分环节，其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{RCs}{RCs+1}=\frac{Ts}{Ts+1}$$

实际上，微分环节常含有惯性，具有这种特性的微分环节称为实用微分环节。若惯性很小，即 $T=RC\ll 1$ 时，有 $G(s)\approx Ts$。

实用微分环节的单位阶跃响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{Ts}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

对该式取拉氏反变换，得

$$c(t)=e^{-\frac{t}{T}} \qquad (2-39)$$

其单位阶跃响应曲线如图 2.20 所示。

图 2.20 实用微分环节的单位阶跃响应曲线

微分环节的特点是，其输出量与输入量对时间的微分成正比，即输出量反映了输入量的变化率，而不反映输入量本身的大小。因此，可由微分环节的输出来反映输入信号的变化趋势，加快系统控制作用的实现，常利用微分环节来改善系统的动态性能。

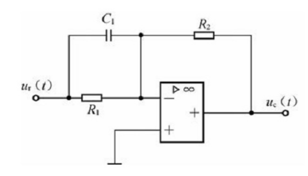


图 2.21　比例微分环节

5. 比例微分环节

由于微分环节的输出只能反映输入信号的变化率，而不反映输入量本身的大小，故在很多场合无法单独使用，因而常采用比例微分环节。

比例微分环节又称一阶微分环节，它是一个比例环节和一个理想微分环节的组合，如图 2.21 所示。

比例微分环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=-\frac{R_2}{\left(R_1\cdot\frac{1}{C_1 s}\right)\Big/\left(R_1+\frac{1}{C_1 s}\right)}=-\frac{R_2}{R_1}\cdot(R_1C_1s+1)=-K(Ts+1) \tag{2-40}$$

同上，可求出比例微分环节的单位阶跃响应为

$$c(t)=KT\delta(t)+K=K[T\delta(t)+1] \tag{2-41}$$

响应曲线如图 2.22 所示。

6. 振荡环节

设振荡环节的二阶微分方程为

$$T^2\frac{dc^2(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t) \tag{2-42}$$

式中 T 为时间常数，ξ 为阻尼比。

当 $0<\xi<1$ 时，式（2-42）便成为振荡环节的微分方程。振荡环节的传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1} \tag{2-43}$$

也可写成

$$G(s)=\frac{\frac{1}{T^2}}{s^2+\frac{2\xi}{T}s+\frac{1}{T^2}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{2-44}$$

式中 $\omega_n=\frac{1}{T}$ 为振荡环节的无阻尼自然振荡频率。振荡环节的方框图如图 2.23 所示。

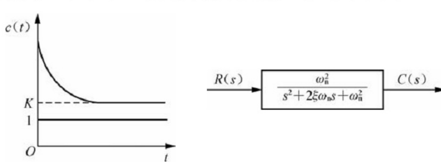


图 2.22　比例微分环节的单位响应曲线　　**图 2.23　振荡环节的方框图**

振荡环节的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\beta)\frac{1}{2} \tag{2-45}$$

式中

$$\beta=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \tag{2-46}$$

振荡环节的单位阶跃响应曲线如图 2.24 所示。

振荡环节的特点是，在单位阶跃输入信号下的输出响应是有阻尼的正弦振荡曲线，即衰减振荡曲线，振荡程度与衰减的快慢与阻尼系数 ξ 密切相关。

例 2-1 的 *RLC* 电路是一种振荡环节，其传递函数 $G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$，其中 $\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，$\xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$。例 2-2 提到的弹簧-质量-阻尼器组成机械位移系统也属于振荡环节，其传递函数为 $G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+fs+k}$，其中 $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\xi=\frac{f}{2\sqrt{mk}}$。

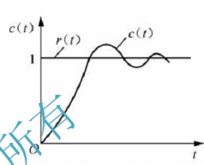


图 2.24 振荡环节的单位阶跃响应曲线

7. 时滞环节

时滞环节也称延迟环节，其数学表达式为

$$c(t)=r(t-\tau) \tag{2-47}$$

式中 τ 为延迟时间。

延迟环节是线性环节，利用拉氏变换的延迟定理，可得其传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=e^{-\tau s}=\frac{1}{e^{\tau s}} \tag{2-48}$$

时滞环节的方框图如图 2.25 所示，时滞环节的单位阶跃响应曲线如图 2.26 所示。



图 2.25 时滞环节的方框图

图 2.26 时滞环节的单位阶跃响应曲线

时滞环节的特点是，当输入信号加入后，输出要延迟一定的时间才开始跟踪输入信号。系统中时滞环节的存在，对系统的稳定性不利，延迟越大，影响越大。

线性定常系统的数学模型中不包括时滞环节。当系统存在时滞环节时，为了分析计算方便，可对时滞环节做近似处理，即将 $e^{\tau s}$ 按泰勒级数展开，在 τ 很小的条件下，略去

高次项，得

$$G(s)=\frac{1}{e^{\tau s}}=\frac{1}{1+\tau s+\frac{\tau^2}{2!}s^2+\cdots}\approx\frac{1}{1+\tau s} \tag{2-49}$$

可见，在一定条件下，时滞环节可近似为惯性环节。

上述典型环节是按数学模型的特征来划分的，它与系统中使用的元件不是一一对应的。一个元件的数学模型可能是一个典型环节，也可能是若干个典型环节；反之，若干个元件的数学模型也可能是一个典型环节的数学模型。

【思考题】 几种常见的典型环节的传递函数各有何特点？

2.4 控制系统动态结构图

微分方程和传递函数是控制系统数学模型的两种形式。在求解微分方程和传递函数时，都需要用消元法消去中间变量，这是一项乏味费时的工作。控制系统的动态结构图又称方框图，是系统数学模型的另一种形式，用它来表示控制系统，不仅能直观地表示出系统中各变量之间的数学关系及信号的传递过程，也能根据等效变换原则，方便地求出系统的传递函数。

2.4.1 动态结构图的概念及建立方法

1. 动态结构图的概念

结构图又称方块图、方框图或框图。控制系统的结构图是由许多对信号进行单向运算的函数方块和一些信号线组成的，是系统中每个元、部件的功能和信号流向的图解。动态结构图表明了系统中各元、部件之间的关系，以及实际系统中的信号流动情况。结构图包括四种基本单元。

(1) 方框(环节)。方框表示对信号进行的数学变换，元、部件或系统的传递函数写在方框中。

(2) 信号线。信号线是带箭头的直线，箭头表示信号的传输方向，在直线旁标记信号的时间函数或象函数。

环节的输入信号是箭头指向方框的信号线，环节的输出信号则是箭头背离方框的信号线，图2.27(a)表示一个函数方框。显然，方框的输出信号等于方框的输入信号与方框内的传递函数的乘积，即

$$C(s)=G(s)R(s)$$

因此，方框可视为单向运算的算子。

(3) 引出点(测量点、分支点)。引出点表示信号引出或测量的位置。从同一位置引出的信号在数值和性质方面完全相同，如图2.27(b)所示。

(4) 综合点(比较点、求和点)。综合点是对两个以上的信号进行加减运算，用圆圈表示。“+”表示相加，“-”表示相减，“+”可省略不写，如图2.27(c)所示，$c=a-b$。

在结构图中，通过方框和信号线，可以将所有的系统变量相互联系起来，信号只能沿着箭头的方向传输。因此，控制系统的结构图清楚地表示了它的单向性。

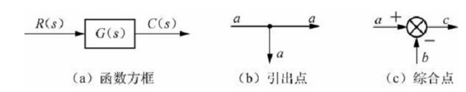


图 2.27 结构图的基本组成单元

用结构图表示系统的优点是，只要根据信号的流向将各个元、部件的方框连接起来，就能容易地组成整个系统的结构图，还可以通过结构图评价每个元、部件对整个系统性能的影响。结构图包括了与系统动态特性有关的信息，但是，它不包括与系统物理结构有关的任何信息，很多完全不同或根本无关的系统可以用同一个结构图来表示。对于给定的系统来说，结构图不是唯一的，由于分析的角度和目的不同，对于同一个系统，可以画出许多不同的结构图。

2. *动态结构图的建立方法*

建立控制系统的结构图，一般按照如下步骤：

（1）确定各元、部件的微分方程或传递函数，并将它们用方框表示。在建立微分方程或传递函数时，应分清每个元、部件的输入量和输出量，同时应考虑相邻元、部件之间的负载效应。

（2）按照系统中各元、部件的信号流向，即各变量的传递顺序，用信号线依次将各元、部件的方框连接起来，使系统的输入量在左端，输出量在右端，便得到系统的结构图。

【例 2-12】 试绘制图 2.28 所示的无源网络的结构图。

解： 可将无源网络视为一个系统，组成网络的元件就对应于系统的元部件。设电路中各变量如图所示，应用运算阻抗的概念，根据基尔霍夫基本定律可以写出以下方程：

$$U_i(s)=I_1(s)R_1+U_o(s)$$

$$U_o(s)=I(s)R_2$$

$$I_2(s)\frac{1}{Cs}=I_1(s)R_1$$

$$I_1(s)+I_2(s)=I(s)$$

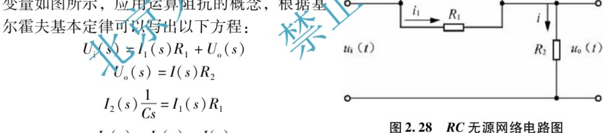


图 2.28 *RC* 无源网络电路图

按照上述方程，可分别绘制相应元件的方框，如图 2.29(a)、(b)、(c)和(d)所示。然后用信号线按信号流向依次将各方框连接起来，便得到无源网络的结构图，如图 2.30 所示。

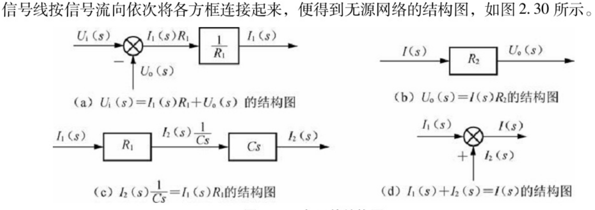


图 2.29 各元件结构图

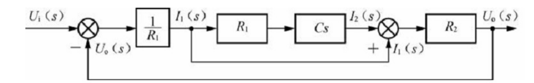


图 2.30　*RC* 无源网络结构图

该无源网络也可根据基尔霍夫基本定律写出以下方程：

$$I_1(s)=\frac{U_i(s)-U_o(s)}{R_1}$$

$$I_2(s)=[U_i(s)-U_o(s)]Cs$$

$$I_1(s)+I_2(s)=I(s)$$

$$U_o(s)=I(s)R_2$$

按照上述方程分别绘制相应元件的方框，然后用信号线按信号流向依次将各方框连接起来，便得到无源网络的结构图，如图 2.31 所示。

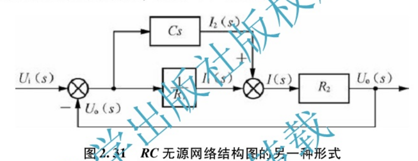


图 2.31　*RC* 无源网络结构图的另一种形式

【例 2－13】　已知两级 *RC* 滤波网络电路图如图 2.32 所示，试绘制其结构图。

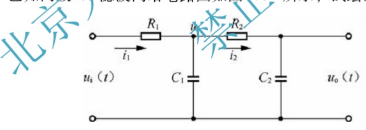


图 2.32　两级 *RC* 滤波网络电路图

解：如图 2.32 设置各变量，利用运算阻抗概念，根据基尔霍夫基本定律可以写出以下各元件的相关方程：

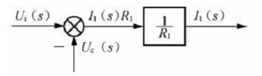
$$U_i(s)-U_c(s)=I_1(s)R_1$$

$$U_c(s)=[I_1(s)-I_2(s)]\frac{1}{C_1s}$$

$$U_c(s)-U_o(s)=I_2(s)R_2$$

$$U_o(s)=I_2(s)\frac{1}{C_2s}$$

按照上述方程，可分别绘制相应元件的方框，如图 2.33(a)、(b)、(c)和(d)所示。然后用信号线按信号流向依次将各方框连接起来，便得到无源网络的结构图，如图 2.34 所示。



(a) $U_i(s)-U_o(s)=I_1(s)R_1$的结构图

(b) $U_c(s)=[I_1(s)-I_2(s)]\frac{1}{C_1s}$的结构图

(c) $U_c(s)-U_o(s)=I_2(s)R_2$的结构图

(d) $U_o(s)=I_2(s)\frac{1}{C_2s}$ 的结构图

图 2.33 各元件结构图

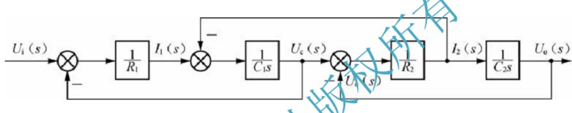
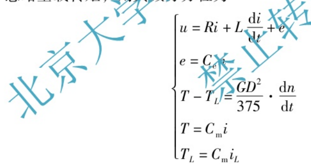


图 2.34 两级 *RC* 滤波网络的结构图

【例 2-14】 试求例 2-3 他励直流电动机的动态结构图。

解： 在例 2-3 中，已经建立了理想空载下他励直流电动机的微分方程，现在考虑负载转矩 T_L，忽略空载转矩，则其微分方程为



$$\begin{cases} u = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + e \\ e = C_e n \\ T - T_L = \dfrac{GD^2}{375} \cdot \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \\ T = C_m i \\ T_L = C_m i_L \end{cases}$$

在零初始条件下，取拉氏变换得

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + E(s) \tag{2-50}$$

$$E(s) = C_e n(s) \tag{2-51}$$

$$T(s) - T_L(s) = \frac{GD^2}{375} sn(s) \tag{2-52}$$

$$T(s) = C_m I(s) \tag{2-53}$$

$$T_L(s) = C_m I_L(s) \tag{2-54}$$

由式(2-50)知

$$U(s) - E(s) = (R + Ls)I(s) = R\left(1 + \frac{L}{R}s\right)I(s)$$

令电动机电枢回路的电磁时间常数 $T_1 = \dfrac{L}{R}$，得

$$\frac{U(s)-E(s)}{R(T_{l}s+1)}=I(s) \tag{2-55}$$

将式(2－53)和式(2－54)代入式(2－52)得

$$I(s)-I_{L}(s)=\frac{GD^{2}}{375C_{m}}sn(s)$$

即

$$\frac{I(s)-I_{L}(s)}{\frac{C_{e}}{R}\cdot\frac{GD^{2}R}{375C_{m}C_{e}}s}=n(s)$$

令电动机的机电时间常数 $T_{m}=\frac{GD^{2}R}{375C_{e}C_{m}}$，得

$$\frac{I(s)-I_{L}(s)}{\frac{C_{e}}{R}\cdot T_{m}s}=\frac{R[I(s)-I_{L}(s)]}{C_{e}T_{m}s}=n(s) \tag{2-56}$$

将式(2－55)、式(2－56)以及式(2－51)分别用结构图表示，如图 2.35(a)、(b)和(c)所示。

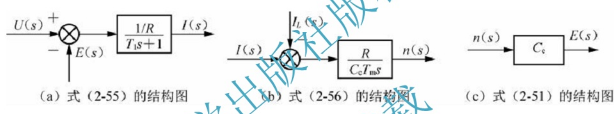


图 2.35　式(2－55)、式(2－56)、式(2－51)对应的结构图

将各图中代表相同变量的信号线连接起来，即得电动机的动态结构图，如图 2.36 所示。

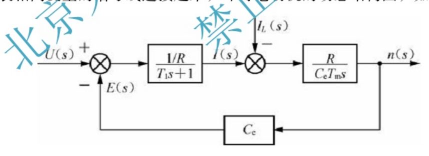


图 2.36　电动机的动态结构图

2.4.2　结构图的等效变换与化简

当确定了系统的输入量和输出量，并有了系统的结构图之后，就可以根据结构图求取系统的传递函数，并进而求解系统的输出响应、分析系统的性能。对于复杂的结构图，为了求取系统的传递函数，需要对其进行适当的运算和变换，设法将结构图化为一个等效的函数方框图，方框中的数学表达式就是系统的传递函数。

结构图的变换应遵循等效原理，即变换前后输入输出的数学关系保持不变。具体而言，就是变换前后前向通道中传递函数的乘积应保持不变，反馈通道中的传递函数的乘积也保持不变。另外，变换应尽量简单易行。

1. 等效变换

1）串联

传递函数分别为 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的两个方框，若 $G_1(s)$ 的输出量作为 $G_2(s)$ 的输入量，则 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 称为串联连接，如图 2.37(a)所示。

由图 2.37(a)得

$$U(s)=G_1(s)R(s)$$
$$C(s)=G_2(s)U(s)$$

消去中间变量 $U(s)$，得

$$C(s)=G_1(s)G_2(s)R(s)=G(s)R(s) \tag{2-57}$$

式中 $G(s)=G_1(s)G_2(s)$ 是两个串联方框的等效传递函数，可以用 2.37(b)的一个方框表示。由此可知，两个方框串联连接的等效传递函数，等于各个方框传递函数的乘积。

(a) 串联连接　　(b) 串联变换

图 2.37　结构图的串联及变换

显然，上述结论可以推广到任意 n 个串联方框。n 个方框依次串联的等效传递函数，等于 n 个传递函数的乘积，即

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s) \tag{2-58}$$

2）并联

传递函数分别为 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的两个方框，如果它们有相同的输入量，而输出量等于两个方框输出量的代数和，则 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 称为并联连接，如图 2.38(a)所示。

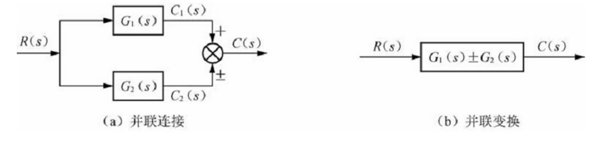
由图 2.38(a)得

$$C_1(s)=G_1(s)R(s)$$
$$C_2(s)=G_2(s)R(s)$$
$$C(s)=C_1(s)\pm C_2(s)$$

消去 $C_1(s)$ 和 $C_2(s)$，得

$$C(s)=[G_1(s)\pm G_2(s)]R(s)=G(s)R(s) \tag{2-59}$$

式中 $G(s)=G_1(s)\pm G_2(s)$ 是两个并联方框的等效传递函数，可以用 2.38(b)的一个方框表示。由此可知，两个方框并联连接的等效传递函数，等于各个方框传递函数的代数和。



(a) 并联连接　　(b) 并联变换

图 2.38　结构图的并联及变换

同样，上述结论可以推广到任意 n 个并联方框。n 个方框并联的等效传递函数，等于该 n 个传递函数的代数和，即

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) \pm \cdots \pm G_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \pm G_i(s) \tag{2-60}$$

3）反馈连接

如图 2.39(a)所示为反馈连接的一般形式。

在反馈连接的结构形式中，按照信号的传输方向可以分为两个通路（或称通道）：与系统的输入信号到输出信号的传输方向一致的通路称为前向通路；而与之方向相反的通路称为反馈通路。在反馈连接的综合点处，如果反馈信号 $B(s)$ 与输入信号 $R(s)$ 的极性相同，在信号线的箭头处标为“+”，称为正反馈；如果极性相反，则标为“-”，称为负反馈。

由图 2.39(a)得

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$B(s) = H(s)C(s)$$
$$E(s) = R(s) \mp B(s)$$

消去 $E(s)$ 和 $B(s)$，得

$$C(s) = G(s)[R(s) \mp H(s)C(s)]$$

因此

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} \tag{2-61}$$

称为闭环传递函数，是方框反馈连接的等效传递函数。式(2-61)中“+”对应负反馈；“-”对应正反馈。其等效变换可用图 2.39(b)表示。

当反馈环节 $H(s)=1$ 时，称为单位反馈。

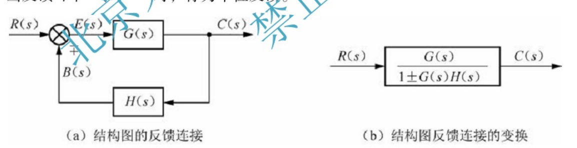


图 2.39　结构图的反馈连接及变换

4）综合点和引出点的移动

在一些复杂系统的动态结构图中，回路之间常存在交叉连接。为了消除交叉连接，便于进行方框的串联、并联或反馈连接的运算，需要移动综合点或引出点的位置。

（1）综合点的移动。

① 综合点前移。综合点可以从一个方框的输出端移到该方框的输入端，称为综合点前移。将图 2.40(a)中的综合点从方框 $G(s)$ 的输出端前移到其输入端。为了保持信号之间的关系不变，必须在被移动的通路上串联一个传递函数为 $G(s)$ 的倒数的方框，如图 2.40(b)所示。

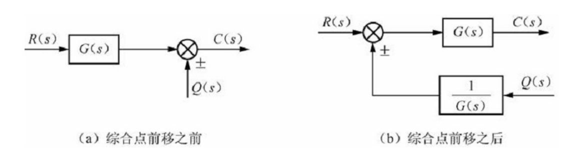


图 2.40 综合点前移变换

移动前结构图中的信号关系为

$$C(s) = G(s)R(s) \pm Q(s)$$

移动后结构图中的信号关系为

$$C(s) = G(s)\left[R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)}\right]$$

可见，两者是完全等效的。

② 综合点后移。综合点从一个方框的输入端移到该方框的输出端，称为综合点后移。将图 2.41(a)中的综合点从方框 $G(s)$的输入端后移到其输出端，应在被移动的通路上串联一个传递函数为 $G(s)$的方框，如图 2.41(b)所示。

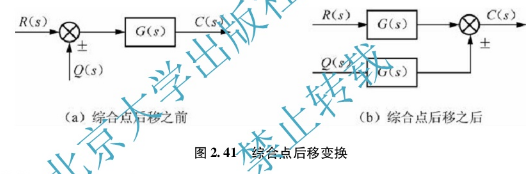


图 2.41 综合点后移变换

移动前结构图中的信号关系为

$$C(s) = G(s)[R(s) \pm Q(s)]$$

移动后结构图中的信号关系为

$$C(s) = G(s)R(s) \pm G(s)Q(s)$$

显然，两者是完全等效的。

③ 综合点的交换和合并。相邻的两个综合点可以相互交换位置而不改变结构图的输入和输出信号的关系，如图 2.42(a)和(b)所示。这个结论对于相邻的多个综合点也是适

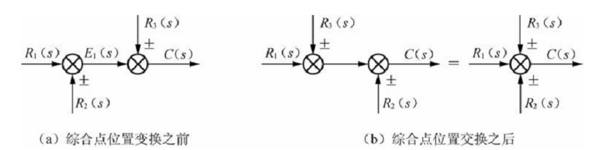


图 2.42 综合点的交换和合并变换

用的。而且，多个输入信号的相加可以合并成一个多输入信号的综合点；一个多输入信号的综合点也可以分成多个两输入信号的综合点。

（2）引出点的移动。

① 引出点前移。将引出点由方框 $G(s)$ 的输出端移到其输入端称为引出点前移，如图 2.43(a)所示。为了保持总的信号关系的等效，应在被移动的通路中串联一个传递函数为 $G(s)$ 的方框，如图 2.43(b)所示。

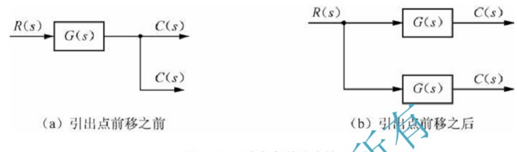


图 2.43　引出点前移变换

② 引出点后移。将引出点由方框 $G(s)$ 的输入端移到其输出端称为引出点后移，如图 2.44(a)所示。为了保持总的信号关系的等效，应在被移动的通路中串联一个传递函数为 $G(s)$ 的倒数的方框，如图 2.44(b)所示。

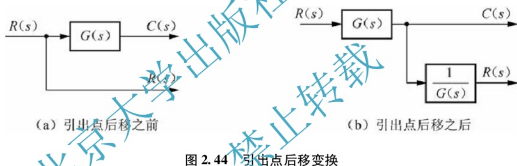


图 2.44　引出点后移变换

③ 相邻引出点之间的移动。若干个引出点相邻，表明是同一个信号线上引出多条信号线输送到多个地方。因此，引出点之间可以随意相互交换位置，完全不会改变引出点引出信号的性质，这种移动不需做任何其他改动，如图 2.45(a)和(b)所示。

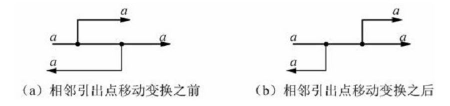


图 2.45　相邻引出点之间的移动变换

注意，一般不要将综合点与引出点的位置做交换。非要交换时，要验证变换前后相应部分的数学关系有无变化。

【例 2-15】　化简图 2.46 所示系统的结构图，并求传递函数 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

解： 化简的步骤是，先通过移动引出点和综合点，消除交叉连接，然后再进行串联、

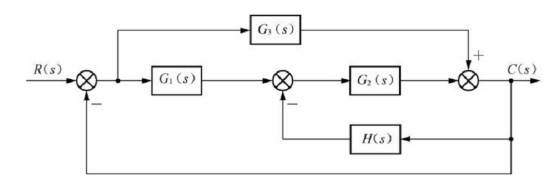


图 2.46　例 2-15 的系统结构图

并联及反馈连接的等效变换，最后求得系统的传递函数。

(1) 将图 2.46 中的第 2 个综合点后移，并与第 3 个综合点交换位置，得到图 2.47(a)。

(2) 将图 2.47(a)进行并联变换和局部反馈变换，得到图 2.47(b)。

(3) 最后利用反馈等效变换求出系统的传递函数，如图 2.47(c)所示。

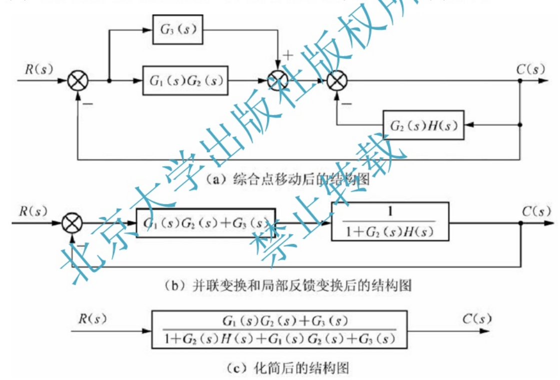


图 2.47　例 2-15 系统结构图的化简

系统的传递函数

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)+G_3(s)}{1+G_2(s)H(s)+G_1(s)G_2(s)+G_3(s)}$$

【例 2-16】　化简图 2.48 所示系统的结构图，并求传递函数 $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$。

(1) 将图 2.48 中的引出点移动，即将 $G_3(s)$与 $G_4(s)$两方框之间的引出点移到 $G_4(s)$的输出端，得到图 2.49(a)。

(2) 将图 2.49(a)进行局部反馈变换，得到图 2.49(b)和(c)。

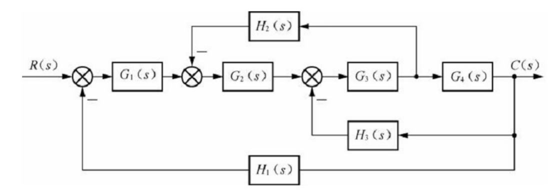


图 2.48　例 2－16 的系统结构图

（3）最后利用反馈等效变换求出系统的传递函数，如图 2.49(d)所示。

（a）引出点移动变换

（b）局部反馈变换

（c）反馈等效变换

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_3(s)G_4(s)H_3(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_1(s)}$$

（d）化简后的结构图

图 2.49　例 2－16 系统结构图的化简

系统的传递函数

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_3(s)G_4(s)H_3(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_1(s)}$$

本例还有其他方法。例如，可以先将 $G_4(s)$ 后的引出点前移到 $G_4(s)$ 方框的输入端，或者将综合点移动到同一点再加以合并等，读者不妨一试。

通过上面的例子，我们可以总结出简化结构图的步骤：

（1）确定系统的输入量和输出量。

（2）如果结构图中有交叉连接，应移动某些引出点或综合点，将交叉连接消除。

（3）对于多回路无交叉连接的结构图，应从内回路开始，由里向外进行变换，直至将结构图变为一个等效的方框，得到所求的传递函数。

2.4.3 梅森增益公式

梅森增益公式是 S. J. 梅森（S. J. Mason）于 1956 年提出的一套计算公式，用以计算动态结构图的传递函数。利用梅森增益公式，对结构图可以不经任何变换和化简，直接得到控制系统的传递函数。

梅森增益公式的一般形式为

$$\Phi(s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k}{\Delta} \tag{2-62}$$

式中 Δ 为特征式，即 $\Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_z+\cdots$。其中 $\sum L_i$ 是所有单独回路的传递函数之和。回路传递函数是指包含反馈符号在内的回路内前向通道和反馈通道传递函数的乘积；$\sum L_iL_j$ 是所有两两互不接触回路的传递函数乘积之和；$\sum L_iL_jL_z$ 是所有三个互不接触回路的传递函数乘积之和；P_k 是第 k 条前向通道的传递函数；Δ_k 是将 Δ 中与第 k 条前向通道相接触回路的传递函数所在项去掉后的剩下部分，称为余子式，也就是与第 k 条前向通道不接触部分的特征式；n 为从输入到输出的前向通道总数。

下面举例说明梅森增益公式的应用。

【例 2-17】 试利用梅森增益公式求图 2.50 的传递函数。

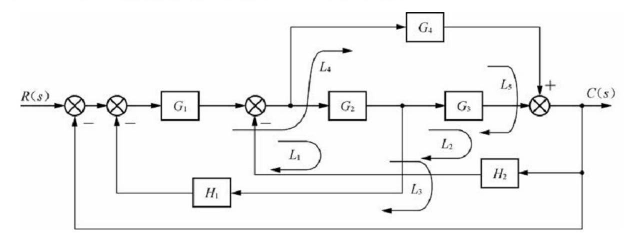


图 2.50 例 2-17 的系统结构图

解：图 2.50 所示系统有五个回路，各回路的传递函数分别为

$$L_1 = -G_1G_2H_1$$
$$L_2 = -G_2G_3H_2$$
$$L_3 = -G_1G_2G_3$$
$$L_4 = -G_1G_4$$
$$L_5 = -G_4H_2$$

该系统中没有两两互不接触的回路，即 $\sum L_iL_j = 0$；同样，也没有三个互不接触的回路，即 $\sum L_iL_jL_z = 0$。系统的特征式为

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{5} L_i = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 + G_4H_2$$

系统有两条前向通道，分别与五个回路都有接触

$$P_1 = G_1G_2G_3,\ \Delta_1 = 1$$
$$P_2 = G_1G_4,\ \Delta_2 = 1$$

将以上各式代入梅森增益公式可得到系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 + G_4H_2}$$

【例 2-18】 试利用梅森增益公式求图 2.51 的传递函数。

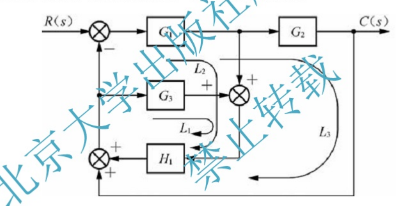


图 2.51　例 2-18 的系统结构图

解：图 2.51 所示系统有三个回路，各回路的传递函数分别为

$$L_1 = G_3H_1$$
$$L_2 = -G_1H_1$$
$$L_3 = -G_1G_2$$

该系统中没有两两互不接触的回路，即 $\sum L_iL_j = 0$；同样，也没有三个互不接触的回路，即 $\sum L_iL_jL_z = 0$。系统的特征式为

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{3} L_i = 1 + G_1G_2 + G_1H_1 - G_3H_1$$

系统有一条前向通道，与 L_2 和 L_3 回路都有接触，与 L_1 回路不接触，所以

$$P_1 = G_1G_2,\ \Delta_1 = 1 - G_3H_1$$

将以上各式代入梅森增益公式可得到系统的传递函数

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2(1 - G_3H_1)}{1 + G_1G_2 + G_1H_1 - G_3H_1}$$

【例 2－19】 试利用梅森增益公式求例 2－17 系统的传递函数。

解：图 2.52 所示系统有三个回路，各回路的传递函数分别为

$$L_1 = -G_2G_3H_2$$
$$L_2 = -G_3G_4H_3$$
$$L_3 = -G_1G_2G_3G_4H_1$$

图 2.52 例 2－19 的系统结构图

该系统中没有两两互不接触的回路，即 $\sum L_iL_j = 0$；同样，也没有三个互不接触的回路，即 $\sum L_iL_jL_z = 0$。系统的特征式为

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{3} L_i = 1 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_2G_3H_2 + G_3G_4H_3$$

系统有一条前向通道，与三个回路都有接触，所以

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4,\ \Delta_1 = 1$$

将以上各式代入梅森增益公式可得到系统的传递函数

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_2G_3H_2 + G_3G_4H_3H_1}$$

显然，上述结果与例 2－17 用结构图变换所得结果相同。

熟悉了梅森增益公式之后，求取系统传递函数，远比结构图等效变换方法简便有效，对于多回路的系统和多输入、多输出系统尤为明显。但是，应注意，在利用梅森增益公式时，不应遗漏任何应该计算的回路和前向通路；也不要重复，更不要出现实际不存在的回路和前向通路。

【思考题】 1. 常见的建立数学模型的方法有哪几种？各有什么特点？
2. 利用结构图等效变换求传递函数的思路。
3. 利用梅森公式求传递函数时，如何确定系统中的回路和前向通道？

2.5 闭环系统的传递函数

自动控制系统一般都是带有负反馈的闭环系统，在实际工作中通常受到两类外作用信号的影响。一类是输入信号(或给定信号、参考输入等)，常用 $R(s)$ 表示；另一类称为



扰动信号(或称扰动量等)，常用 $D(s)$ 表示。输入信号通常是加在系统的输入端，而扰动信号一般作用在被控对象上，也可能出现在系统组成的其他元、部件中，甚至夹杂在输入信号之中。一个闭环系统的典型结构如图 2.53 所示。

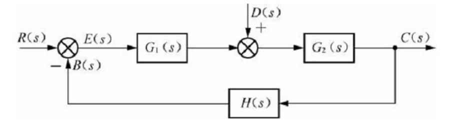


图 2.53　闭环控制系统典型结构图

$R(s)$ 和 $D(s)$ 都是施加于控制系统的外作用，$R(s)$ 为给定输入信号；$D(s)$ 是扰动输入信号；$C(s)$ 是输出信号，$B(s)$ 是反馈信号。$G_2(s)$ 表示被控对象的传递函数，$G_1(s)$ 代表一般控制器(或称校正装置、控制装置，有校正和放大作用)的传递函数，$H(s)$ 是反馈装置(或称传感器或检测装置，起检测和变换作用)的传递函数。$G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 构成前向通路传递函数，$H(s)$ 则是反馈通路传递函数，当 $H(s)=1$ 时，称为单位反馈系统。

下面介绍闭环控制系统传递函数的一般概念。

2.5.1　系统的开环传递函数

在闭环控制系统中，前向通路传递函数与反馈通路传递函数的乘积，称为闭环系统的开环传递函数，即

$$G_k(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)=G(s)H(s) \tag{2-63}$$

式中 $G(s)=G_1(s)G_2(s)$。

显然，在控制系统结构图中，将反馈信号 $B(s)$ 在相加点处断开，即断开主反馈通路，此时反馈信号 $B(s)$ 与误差信号 $E(s)$ 之比就是系统的开环传递函数，即

$$G_k(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)=G(s)H(s)=\frac{B(s)}{E(s)}$$

2.5.2　系统的闭环传递函数

系统的闭环传递函数分为给定信号 $R(s)$ 作用下的闭环传递函数和扰动信号 $D(s)$ 作用下的闭环传递函数。

1. 给定信号 $R(s)$ 作用下

设 $D(s)=0$，将图 2.53 改画成图 2.54，可求得在 $R(s)$ 作用下系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2-64}$$

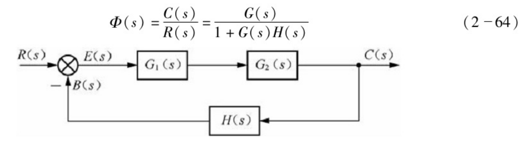


图 2.54　$R(s)$ 作用时系统的动态结构图

$R(s)$作用下系统输出为

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{G(s)R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

2. 扰动信号 $D(s)$作用下

设 $R(s)=0$，将图 2.53 改画成图 2.55，可求得在 $D(s)$作用下系统的闭环传递函数为

$$\Phi_{\mathrm{d}}(s)=\frac{C(s)}{D(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2-65}$$

$D(s)$作用下系统输出为

$$C(s)=\Phi_{\mathrm{d}}(s)D(s)=\frac{G_2(s)D(s)}{1+G(s)H(s)}$$

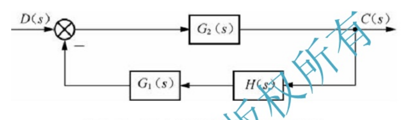


图 2.55　$D(s)$作用时系统的动态结构图

根据线性系统的叠加原理，当输入信号和扰动信号同时作用于控制系统时，如图 2.53 所示，系统的输出响应为各外部信号作用引起的输出响应的总和，即

$$C(s)=\frac{G(s)R(s)}{1+G(s)H(s)}+\frac{G_2(s)D(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2-66}$$

2.5.3 系统的误差传递函数

系统的误差信号 $E(s)$，误差传递函数也分为给定信号 $R(s)$作用下的误差传递函数和扰动信号 $D(s)$作用下的误差传递函数。前者表征系统输出跟随输入信号的能力，后者反映系统抗扰动的性能。

1. 给定信号 $R(s)$作用下

设 $D(s)=0$，则图 2.53 可简化为图 2.56 所示，可求得系统的误差传递函数为

$$\Phi_{\mathrm{er}}(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)} \tag{2-67}$$

$R(s)$作用下系统误差为

$$E(s)=\Phi_{\mathrm{er}}(s)R(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

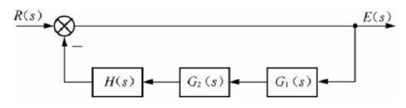


图 2.56　$R(s)$作用时误差输出的动态结构图

2. 扰动信号 $D(s)$ 作用下

设 $R(s)=0$，则图 2.53 可简化为图 2.57 所示，可求得在 $D(s)$ 作用下系统的误差传递函数为

$$\Phi_{ed}(s)=\frac{E(s)}{D(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2-68}$$

$D(s)$ 作用下系统误差为

$$E(s)=\Phi_{ed}(s)D(s)=\frac{-G_2(s)H(s)D(s)}{1+G(s)H(s)}$$

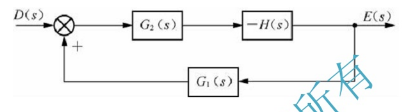


图 2.57　$D(s)$ 作用时误差输出的动态结构图

3. 系统总误差

根据迭加原理，总误差为

$$E(s)=\Phi_{er}(s)\cdot R(s)+\Phi_{ed}(s)\cdot D(s) \tag{2-69}$$

由式(2-65)～式(2-68)可见，这些传递函数各不相同，但其分母却完全相同，即闭环特征式是一样的。因而，它们的输出与输入变量之间的动态变化必具有相似的特性。

【思考题】　闭环系统的开环传递函数与其闭环传递函数、误差传递函数有什么关系?

2.6　控制系统数学模型建立举例

以图 2.58 所示的转速单闭环控制系统为例，说明系统数学模型的建立方法。

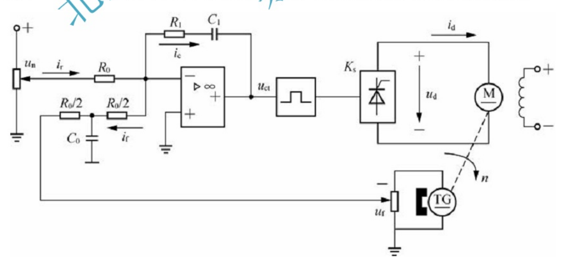


图 2.58　单闭环速度控制系统

1. 系统动态结构图的建立

该系统由给定环节、速度调节器、速度反馈环节、功率放大器以及电动机构成。输

入为给定电压 u_n，输出为电动机的转速 n。

首先画出各环节的结构图，然后按信号的传递方向把各环节的方框图连接起来，就构成了系统的动态结构图。

1）比较环节和速度调节器

由图 2.58，根据运算放大器的特性，得

$$i_c = i_r - i_f$$

取拉氏变换得

$$I_c(s) = I_r(s) - I_f(s) \tag{2-70}$$

回路中电流的计算采用复阻抗的概念，即

$$I_c(s) = \frac{U_n(s)}{R_0} \tag{2-71}$$

$$I_c = \frac{-U_{ct}(s)}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{-R_1 C_1 s U_{ct}(s)}{(R_1 C_1 s + 1) R_1} = \frac{-\tau_1 s U_{ct}(s)}{(\tau_1 s + 1) R_1} \tag{2-72}$$

式中 $\tau_1 = R_1 C_1$。

$$I_f = \frac{U_f(s)}{\frac{1}{2}R_0 + \frac{\frac{1}{C_0 s}\cdot\frac{R_0}{2}}{\frac{1}{C_0 s}+\frac{R_0}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{C_0 s}}{\frac{1}{C_0 s}+\frac{R_0}{2}} = \frac{U_f(s)}{R_0\left(\frac{R_0 C_0}{4}s + 1\right)}$$

$$= \frac{U_f(s)}{R_0(T_0 s + 1)} \tag{2-73}$$

滤波时间常数 $T_0 = \frac{R_0 C_0}{4}$。

将式(2-71)~式(2-73)代入式(2-70)，整理得

$$U_{ct}(s) = \frac{K_p(\tau_1 s + 1)}{\tau_1 s}\left[U_n(s) - \frac{U_f(s)}{T_0 s + 1}\right]$$

K_p 为速度调节器比例系数，$K_p = -\frac{R_1}{R_0}$。

比例环节和速度调节器的结构图如图 2.59 所示。

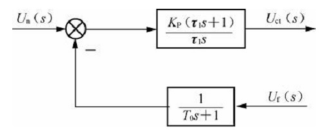


图 2.59 比例环节和速度调节器的结构图

2）功率放大环节

忽略晶闸管整流电路的延迟时间常数，功率放大环节可视为无惯性放大环节，其输

入、输出关系为

$$U_d(s)=K_s U_{ct}(s)$$

式中 K_s 为放大倍数。

3）电动机部分

前面已经求得电动机的动态结构图，如图 2.36 所示。

4）速度反馈环节

$$U_f(s)=K_{sf}N(s)$$

将以上环节的框图连接起来，就构成了系统的动态结构图，如图 2.60 所示。

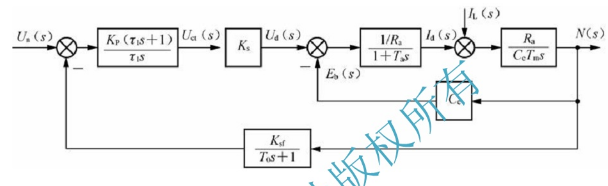


图 2.60　速度闭环控制系统的动态结构图

2. 系统传递函数的确定

对图 2.60 进行等效变换和化简后，可得到图 2.61。

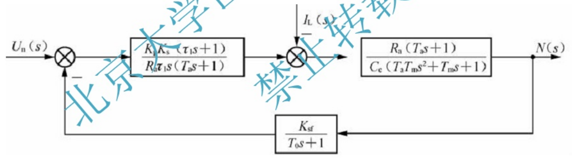


图 2.61　化简后的速度闭环控制系统动态结构图

将图 2.61 与闭环控制系统的典型动态结构图相比较，可得

$$G_1(s)=\frac{K_p K_s(\tau_1 s+1)}{R_a \tau_1 s(T_a s+1)}$$

$$G_2(s)=\frac{R_a(T_a s+1)}{C_e(T_a T_m s^2+T_m s+1)}$$

$$H(s)=\frac{K_{sf}}{T_0 s+1}$$

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{K_p K_s(\tau_1 s+1)}{C_e \tau_1 s(T_a T_m s^2+T_m s+1)}$$

1）系统的开环传递函数

显然，系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=G(s)H(s)=\frac{K_pK_sK_{sf}(\tau_1 s+1)}{C_e\tau_1 s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_0s+1)}$$

2）系统的闭环传递函数

系统的闭环传递函数分为给定信号作用下的闭环传递函数和扰动信号作用下的闭环传递函数。

给定信号 $U_n(s)$ 作用时，设 $I_L(s)=0$。闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{N(s)}{U_n(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$
$$=\frac{K_pK_s(\tau_1 s+1)(T_0s+1)}{C_e\tau_1 s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_0s+1)+K_pK_sK_{sf}(\tau_1 s+1)} \tag{2-74}$$

扰动信号 $I_L(s)$ 作用时，设 $U_n(s)=0$。闭环传递函数为

$$\Phi_d(s)=\frac{N(s)}{-I_L(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G(s)H(s)}$$
$$=\frac{R_a\tau_1 s(T_as+1)(T_0s+1)}{C_e\tau_1 s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_0s+1)+K_pK_sK_{sf}(\tau_1 s+1)} \tag{2-75}$$

3）系统的误差传递函数

系统的误差传递函数分为给定信号作用下的误差传递函数和扰动信号作用下的误差闭环传递函数。

给定信号 $U_n(s)$ 作用时，设 $I_L(s)=0$。误差传递函数为

$$\Phi_{er}(s)=\frac{E(s)}{U_n(s)}=\frac{C_e\tau_1 s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_0s+1)}{C_e\tau_1 s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_0s+1)+K_pK_sK_{sf}(\tau_1 s+1)} \tag{2-76}$$

扰动信号 $I_L(s)$ 作用时，设 $U_n(s)=0$。误差传递函数为

$$\Phi_{ed}(s)=\frac{E(s)}{-I_L(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$
$$=\frac{-R_aK_{sf}\tau_1 s(T_as+1)}{C_e\tau_1 s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_0s+1)+K_pK_sK_{sf}(\tau_1 s+1)} \tag{2-77}$$

2.7 用 MATLAB 处理系统数学模型

在控制系统的分析和设计中，首先要建立系统的数学模型。线性系统理论中常用的数学模型有微分方程、传递函数和动态结构图等。利用 MATLAB 可对它们进行适当的处理。

1. 传递函数模型

线性系统的传递函数模型一般可表示为

$$G(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\quad(n\geqslant m)$$

将系统的分子和分母多项式的系数按降幂的方式以向量的形式输入给两个变量 num 和 den，就可以轻易地将传递函数模型输入到 MATLAB 环境中。

命令格式为

```
num=[b0,b1,…,bm-1,bm];
den=[a0,a1,a2,…,an-1,an];
```

在 MATLAB 控制系统工具箱中，定义了 tf() 函数，它可由传递函数分子分母给出的变量构造出单个的传递函数对象，从而使得系统模型的输入和处理更加方便。

该函数的调用格式为

```
G=tf(num,den)
```

【例 2-20】 在 MATLAB 中表示 $G(s)=\dfrac{s+5}{s^4+2s^3+3s^2+4s+5}$。

解： 键入

```
num=[1 5];
den=[1 2 3 4 5];
G=tf(num,den)
```

运行结果：

```
Transfer function:
        s+5
-------------------------
s^4+2s^3+3s^2+4s+5
```

这时对象 G 可以用来描述给定的传递函数模型，作为其他函数调用的变量。

【例 2-21】 在 MATLAB 中表示 $G(s)=\dfrac{6(s+5)}{(s^2+3s+1)^2(s+6)}$。

解： 键入

```
num=6*[1 5];
den=conv(conv([1 3 1],[1 3 1]),[1 6]);
tf(num,den)
```

运行结果：

```
Transfer function:
              6s+30
-----------------------------------
s^5+12s^4+47s^3+72s^2+37s+6
```

其中，conv()函数(标准的 MATLAB 函数)用来计算两个向量的卷积，多项式乘法当然也可以用这个函数来计算。该函数允许任意多层嵌套，从而表示复杂的计算。

还可以建立零、极点形式的传递函数，采用的函数为 zpk(z, p, k)。其中，z 表示所有零点构成的矢量，p 表示所有极点构成的矢量，k 表示增益。

【例 2-22】 在 MATLAB 中表示 $G(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+1)}$。

解： 键入

```
z=[-3];
p=[-1 -1];
k=1;
zpk(z,p,k)
```

运行结果：

```
Zero/pole/gain:
 (s+3)
---------
(s+1)^2
```

2. 系统结构图模型

若已知控制系统的结构图，使用 MATLAB 函数可实现结构图的转换。

1）串联

如图 2.62 所示，两个系统 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 相串联，在 MATLAB 中可用串联函数 series( ) 来求合成系统，其调用格式为

```
[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)
```

其中 $G_1(s)=\frac{\text{num1}}{\text{den1}}$，$G_2(s)=\frac{\text{num2}}{\text{den2}}$，$G(s)=\frac{\text{num}}{\text{den}}$。

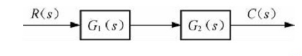


图 2.62　串联连接

也可直接采用以下方式

$$G(s)=G_2(s)*G_1(s)$$

提示：对于单输入—单输出系统，$G=G_2*G_1=G_1*G_2$；对于多输入—多输出系统，只有部分信号串联连接时，采用以下调用格式：

```
G=series(G1,G2,y1,u2)  %G1 的输出 y1 与 G2 的输入 u2 直接连接
```

【例 2-23】 已知两个系统的传递函数如下，求它们串联后系统总的传递函数。

$$G_1=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2},\quad G_2=\frac{s^2+7s+12}{s^2+3s+2}$$

解：键入

```
num1=[2 6 5];
den1=[1 4 5 2];
G1=tf(num1,den1)
num2=[1 7 12];
den2=[1 3 2];
G2=tf(num2,den2)
G= G2*G1
```

运行结果：

```
Transfer function:
   2s^2+6s+5
 ---------------
 s^3+4s^2+5s+2
Transfer function:
 s^2+7s+12
 ----------
  s^2+3s+2
Transfer function:
  2s^4+20s^3+71s^2+107s+60
 ---------------------------
 s^5+7s^4+19s^3+25s^2+16s+4
```

2）并联

如图 2.63 所示，两个系统 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 相并联，在 MATLAB 中可用并联函数 paral-

lel( )来实现合成系统，其调用格式为

```
[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)
```

式中，$G_1(s)=\dfrac{num1}{den1}$，$G_2(s)=\dfrac{num2}{den2}$，$G(s)=\dfrac{num}{den}$。

提示：对于单输入—单输出系统，可直接采用 $G=G_1+G_2$ 得到并联连接的合成系统；对于多输入—多输出系统，当需要指定信号并联连接关系时，采用以下调用格式：

```
G=parallel(G1,G2,u1,u2,y1,y2)   % u1,u2,y1,y2 分别为第一系统 G1 和第二系统 G2 的输入和输出编号
```

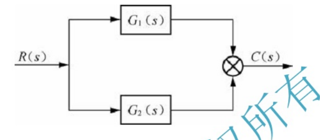


图 2.63 并联连接

【例 2-24】 已知两个系统的传递函数如下，求它们并联后系统总的传递函数。

$$G_1=\frac{6s+5}{4s^2+5s+2},\ G_2=\frac{s^2+s+3}{2s^2+18s+2}$$

解：键入

```
G1=tf([6 5],[4 5 2]);
G2=tf([1 1 3],[2 18 2]);
G= G1+G2
```

运行结果：

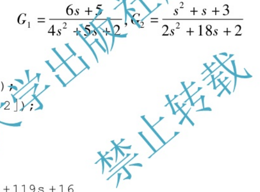
```
Transfer function:
4s^4+21s^3+137s^2+119s+16
--------------------------
 8s^4+82s^3+102s^2+46s+4
```

3）反馈

反馈连接如图 2.64 所示，前向通路传递函数为 $G(s)$，反馈通路传递函数为 $H(s)$，在 MATLAB 中可用 feedback( )函数来实现反馈连接，其调用格式为

```
[num,den]=feedback(numg,deng,numh,denh,sign)
```

其中 $G(s)=\dfrac{numg}{deng}$，$H(s)=\dfrac{numh}{denh}$，sign 为反馈极性，若为正反馈其值为 1，若为负反馈其值为 -1。



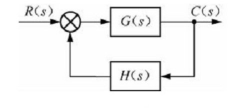


图 2.64 反馈连接

【例2－25】 在图2.64的系统中，已知 $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+2}$，$H(s)=\dfrac{1}{s}$，求闭环传递函数。

解：键入

```
numg=[1 1];deng=[1 5 2];
numh=[1];denh=[1 0];
[num,den]=feedback(numg,deng,numh,denh,-1);
P=tf(num,den)
```

运行结果：

```
Transfer function:
      s^2+s
-----------------
s^3+5s^2+3s+1
```

小　　结

分析和设计系统，首先需要建立系统的数学模型。描述系统动态特性的数学表达式称为系统的数学模型。

控制系统的数学模型有多种，常见的有微分方程、传递函数、动态结构图，以及本书第5章介绍的频率特性。各种数学模型之间可以相互转换。

微分方程是表述系统动态特性的基本形式。

传递函数是在零初始条件下，线性定常系统输出量的拉氏变换与系统输入量的拉氏变换之比。

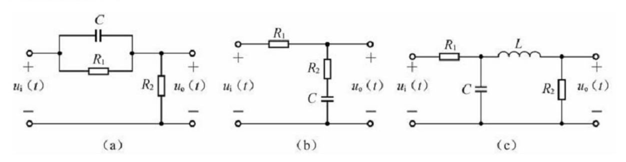
动态结构图能反映系统各变量之间的数学关系，也能方便地求出传递函数，方法是，在保持被变换部分的输入量和输出量之间的数学关系不变的前提下，对动态结构图进行等效变换，并进行化简。

一个控制系统可看成由若干个典型环节组成，掌握这些典型环节，将有助于对于整个系统的分析。

闭环系统的传递函数可分为开环传递函数、闭环传递函数和误差传递函数等。

习　　题

1. 已知无源网络如题图2.1所示，其中 $u_i(t)$ 为输入电压，$u_o(t)$ 为输出电压，试列写动态微分方程。



题图2.1

2. 试求题图 2.2 中各无源网络的传递函数。

(a)　(b)

(c)　(d)

题图 2.2

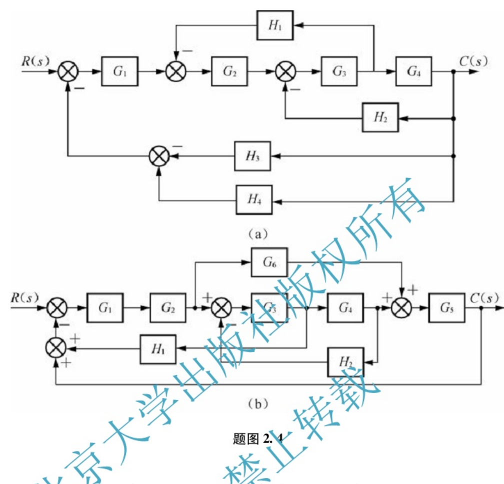
3. 试求题图 2.3 中各有源网络的传递函数。

(a)　(b)

(c)　(d)

题图 2.3

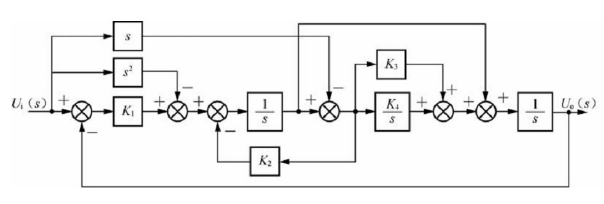
4. 控制系统的结构图如题图2.4所示，试利用结构图的等效变换法，求各系统的传递函数。



题图2.4

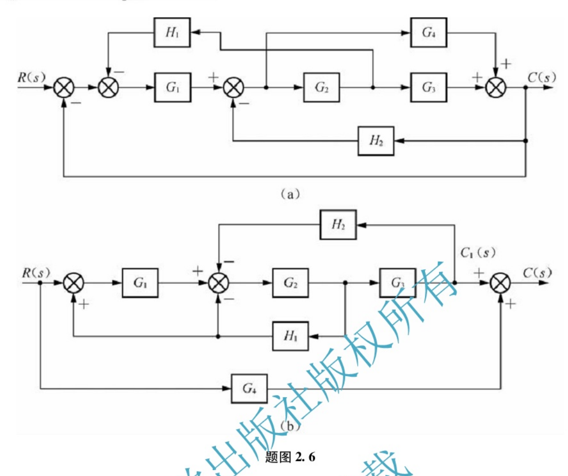
5. 对于题图2.4所示各系统，试利用梅森增益公式求各系统的传递函数。

6. 惯性导航装置中的地垂线跟踪系统结构图如题图2.5所示，求该系统的传递函数。



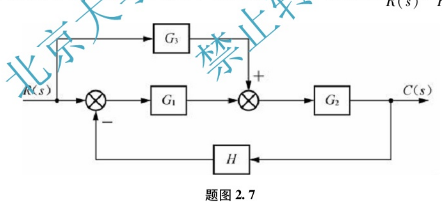
题图2.5

7. 求题图2.6所示系统的传递函数。



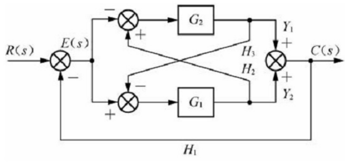
题图 2.6

8. 系统动态结构图如题图 2.7 所示，化简该图，并求传递函数$\frac{C(s)}{R(s)}$和$\frac{E(s)}{R(s)}$。



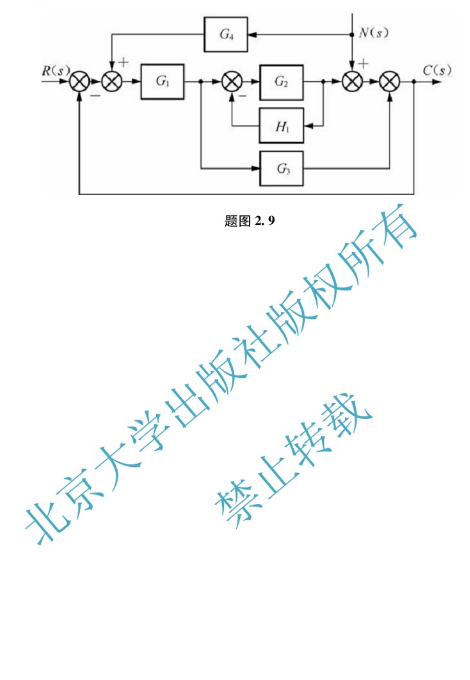
题图 2.7

9. 求题图 2.8 所示系统的传递函数。



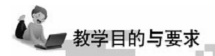
题图 2.8

10. 系统结构图如题图 2.9 所示，试写出系统在输入 $r(t)$ 及扰动 $n(t)$ 同时作用下输出 $C(s)$ 的表达式。



题图 2.9

第3章 时域分析法



教学目的与要求

1. 掌握典型输入信号的特点及控制系统的性能指标。
2. 熟练掌握一、二阶系统的数学模型及单位阶跃响应。
3. 掌握一、二阶系统的性能指标。
4. 了解高阶系统的分析方法。
5. 掌握系统的判据及劳斯判据的应用。
6. 掌握稳态误差的求解方法。
7. 了解使用 MATLAB 进行系统时域分析的方法。



知识结构



动态过程的数学模型是对控制系统进行理论研究的前提。模型一旦建立，便可运用适当的方法求得已知输入信号作用下系统的输出响应，从而对系统的性能做出定性分析和定量计算。对线性定常系统，常用的分析方法有时域法、根轨迹法和频率特性法。本章将讨论时域分析法。

时域分析法是根据系统的微分方程，用拉氏变换直接解出动态过程，并依据过程曲线及表达式分析系统的性能。

3.1 典型响应及性能指标

控制系统的动态性能主要是通过系统的动态响应过程体现出来的，分析过程也正是分析系统在不同输入信号下的响应过程。为了便于对系统的分析和设计，一般以一些具有代表性的信号作为典型输入信号，同时通过定义相应的性能指标来反映系统的性能。

3.1.1 典型输入信号

一般情况下，系统都是针对某一类输入信号来设计的。例如，水位调节系统，其输入信号为要求的水位高度。但是在大多数情况下，控制系统的输入信号以无法预测的方式变化，如火炮系统中，敌方的位置和速度变化无法预料，也就是输入信号具有随机性，从而给设计系统增添了困难。为了便于分析和设计，同时也为了便于对各种控制系统的性能进行比较，需要假定一些基本的输入函数形式，称为典型输入信号。

典型输入信号一般应具备以下两个条件：

(1) 具有一定的代表性，数学表达式简单，便于数学分析和处理。

(2) 易于在实验条件下获得。

控制系统中常用的典型输入信号有单位阶跃信号、单位斜坡信号、单位加速度信号、单位脉冲信号和正弦信号。

1. 单位阶跃信号

阶跃信号表示瞬间突变并保持不变的信号，如图 3.1 所示。它的数学表达式为

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ R_0 & t\geqslant 0\end{cases} \qquad (3-1)$$

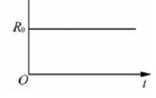


图 3.1 阶跃信号

其拉氏变换为

$$R(s)=\frac{R_0}{s} \qquad (3-2)$$

式中 R_0 为常量。当 $R_0=1$ 时，式(3-1)所表述的信号为单位阶跃信号，记为 $1(t)$。指令的突然转换、电源的突然接通、负荷的突变、常值干扰的突然出现等均可视为阶跃信号作用。

2. 单位斜坡信号

斜坡信号表示由零值开始随时间 t 线性增长的信号，如图 3.2 所示。其数学表达式为

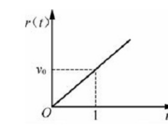


图 3.2　斜坡信号

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ v_0 t & t\geqslant 0\end{cases}\tag{3-3}$$

其拉氏变换为

$$R(s)=\frac{v_0}{s^2}\tag{3-4}$$

式中 v_0 为常量，当 $v_0=1$ 时，式(3-3)所表述的信号为单位斜坡信号。恒速变化的位置指令信号、数控机床中直线进给时的位置信号等都是斜坡信号。

3. 单位加速度信号

加速度信号也叫抛物线信号，表示随时间 t 以等加速度增长的信号，如图 3.3 所示。它的数学表达式为

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2}a_0 t^2 & t\geqslant 0\end{cases}\tag{3-5}$$

其拉氏变换为

$$R(s)=\frac{a_0}{s^3}\tag{3-6}$$

式中 a_0 为常量，当 $a_0=1$ 时，式(3-5)所表述的信号为单位加速度信号，也称为单位抛物线信号。

4. 单位脉冲信号

脉冲信号是一个持续时间很短的信号，如图 3.4 所示。其数学表达式为

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0, t>\varepsilon\\ H/\varepsilon & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\end{cases}\tag{3-7}$$

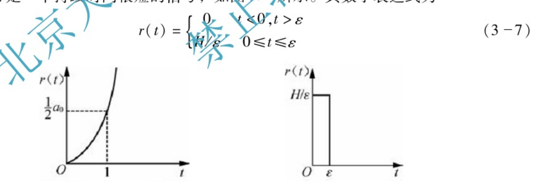


图 3.3　抛物线信号　　　图 3.4　脉冲信号

当 $H=1$ 时，记为 $\delta_\varepsilon(t)$。若令 $\varepsilon\to 0$，则称其为单位理想脉冲函数，用 $\delta(t)$ 表示，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}\tag{3-8}$$

且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\tag{3-9}$$

拉氏变换为

$$L[\delta(t)]=1\tag{3-10}$$

显然，$\delta(t)$所表述的信号在实际中是无法得到的。在工程实际中，当ε远远小于被控对象的时间常数时，可近似用$\delta(t)$来表示。例如，脉冲很窄的电压信号、瞬时作用力等都可以近似看成脉冲信号。

5. 正弦信号

正弦信号是一种周期性变化的信号，如图 3.5 所示。它的一般表达式为

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A\sin\omega t & t\geqslant 0\end{cases} \tag{3-11}$$

其拉氏变换为

$$R(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \tag{3-12}$$

图 3.5 正弦信号

正弦信号主要用在交流供电电源和信号的频谱分析中。

3.1.2 阶跃响应的性能指标

1. 动态过程与稳态过程

在典型输入信号的作用下，任何一个控制系统的时间响应都是由动态过程和稳态过程两部分组成。

1）动态过程

动态过程也称为过渡过程或瞬态过程，指系统在典型输入信号作用下，系统输出量从初始状态到最终状态的响应过程。瞬态响应可以提供关于系统稳定性、响应速度及阻尼情况等信息。

2）稳态过程

稳态过程是指系统在典型输入信号作用下，当t趋于无穷时，系统的输出状态。稳定的系统才会有稳态过程。稳定的系统，在阶跃函数作用下，其稳态输出为常数值。稳态响应可以提供系统有关稳态误差的信息。

由此可见，系统的性能指标也可以分为两大类，一类是稳态性能指标，另一类是动态性能指标。在分析控制系统时，既要研究系统的动态性能，同时也要研究系统的稳态性能。

2. 动态性能指标

一般认为，阶跃输入信号对系统来说是最严峻的工作状态，如果系统在阶跃输入信号的作用下动态性能满足要求，那么系统在其他输入信号作用下，其动态性能也是令人满意的。

因此描述稳定系统在单位阶跃信号作用下，动态过程随时间t变化的状态指标称为动态性能指标。控制系统的典型阶跃响应曲线如图 3.6 所示，其动态性能指标通常如下：

（1）上升时间t_r：响应曲线第一次达到稳态值所需的时间。上升时间越短，响应速度越快。

（2）峰值时间t_p：响应曲线达到第一个峰值所需要的时间。

（3）调节时间t_s：响应曲线达到并保持在稳态值的±5%或±2%所需的最短时间。

（4）超调量 $\sigma\%$：指输出的最大值 $c(t_p)$ 超出稳态值 $c(\infty)$ 的百分比，即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \tag{3-13}$$

t_r 或 t_p 评价系统的初始响应速度；t_s 反映总体快速性；$\sigma\%$评价系统的相对平稳性。

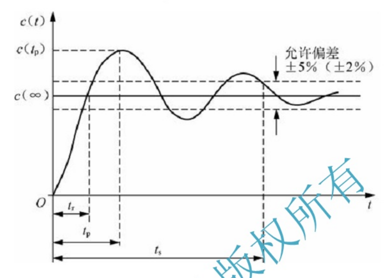


图 3.6　阶跃响应曲线与动态性能指标

3. 稳态性能指标

稳态性能指标是表征系统的输出量最终复现输入量的程度，可用稳态误差 e_{ss} 来描述。稳态误差指系统的期望值与实际稳态值之间的差值。常用定义：系统输入量 $r(t)$ 与反馈量 $b(t)$ 之间偏差的稳态值，即

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}[r(t) - b(t)] \tag{3-14}$$

稳态误差反映了系统跟踪输入信号或抑制扰动的能力。e_{ss} 越小，说明系统稳态精度越高。

【思考题】　单位阶跃响应的动态性能指标包括哪几项内容，它们之间有怎样的关系？

3.2　一阶系统分析

3.2.1　一阶系统数学模型及单位阶跃响应

凡以一阶微分方程作为数学模型的控制系统，称为一阶系统。在工程实践中，一阶系统经常可以见到，而且常常用来近似表征某些高阶系统的特性。

1. 一阶系统的数学模型

一阶系统的动态结构图如图 3.7 所示，其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \tag{3-15}$$

式中 T 为时间常数。式(3-15)称为一阶系统的标准式。

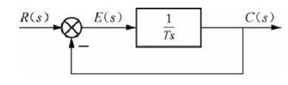


图 3.7　一阶系统的动态结构图

2. 一阶系统的单位阶跃响应

系统在单位阶跃信号作用下的响应称为单位阶跃响应。设输入信号 $r(t)=1(t)$，其拉氏变换为 $R(s)=\frac{1}{s}$，当它作用于一阶系统时，输出量的拉氏变换为

$$C(s)=\Phi(s)\times R(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

经拉氏反变换可得一阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{T}t}\quad(t\geqslant 0)$$

由此可见，一阶系统的单位阶跃响应是一条初始值为零，按指数规律上升到 1 的曲线。如图 3.8 所示。

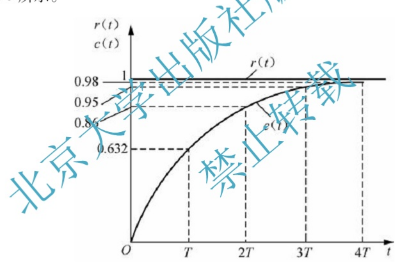


图 3.8　一阶系统的单位阶跃响应

3. 一阶系统的单位斜坡响应

系统在单位斜坡信号作用下的输出响应为单位斜坡响应。设输入信号为 $r(t)=t$，其拉氏变换为 $R(s)=\frac{1}{s^2}$，当它作用于一阶系统时，输出量的拉氏变换为

$$C(s)=\Phi(s)\times R(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+\frac{1}{T}}\tag{3-16}$$

经拉氏反变换可得一阶系统的单位斜坡响应为

$$c(t)=t-T+T\mathrm{e}^{-\frac{1}{T}t}\quad(t\geqslant 0)$$

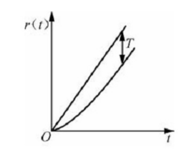


图 3.9　一阶系统的单位斜坡响应

单位斜坡响应曲线如图 3.9 所示。输入与输出的误差为

$$e(t)=r(t)-c(t)=t-(t-T+T\mathrm{e}^{-\frac{1}{T}t})=T(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{T}t})$$

稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=T$$

可见，一阶系统在单位斜坡输入之下存在稳态误差，其大小等于时间常数 T。

另外，由式(3-16)可知，系统相应的稳态分量既与系统的输入有关，又与系统的传递函数有关，而系统响应的瞬态分量则取决于系统的传递函数。这一结论适用于任何阶次的线性定常系统。

3.2.2　一阶系统的性能指标

对于一阶系统来讲，单位阶跃响应主要取决于时间常数 T，因此可以用 T 来衡量系统输出量的值。由 $c(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$可以计算出，当 $t=T$ 时，$c(t)=0.632$，这表明输出响应达到稳态值的63.2%所需要的时间值就是一阶系统的时间常数 T。当 t 分别等于 $2T$、$3T$ 和 $4T$ 时，$c(t)$ 的值分别为稳态值的 86.5%、95%和 98.2%，如图 3.8 所示。根据这一特点，可以用实验方法测定一阶系统的时间常数或判定某一系统是否为一阶系统。

很显然，峰值时间 t_p 和超调量 $\sigma\%$ 都不存在。一阶系统的动态性能指标为

$$t_s=3T\quad 按 \pm5\% 误差$$

$$或\ t_s=4T\quad 按 \pm2\% 误差$$

一阶系统在单位阶跃信号的作用下，系统输出的最终稳态值 $c(\infty)=1$，而输入期望值为1，因此稳态误差 $e_{ss}=0$。

【例 3-1】　一阶系统的结构如图 3.10 所示，其中 K 为放大系数，H 为反馈系数。

（1）设 $K=100$，$H=0.5$，试求系统的调节时间 t_s(按 ±5%误差)；

（2）设 $K=100$，如果要求 $t_s=0.1\mathrm{s}$，求反馈系数 H。

解：（1）由结构图可知系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times0.5}=\frac{2}{0.02s+1}$$

因此 $T=0.02$，调节时间 $t_s=3T=0.06\mathrm{s}$(按 ±5%误差)。

（2）当 $K=100$ 时，系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}H}=\frac{\frac{1}{H}}{\frac{0.01}{H}s+1}$$

$$T=\frac{0.01}{H}$$

由于 $t_s=3T=\frac{0.03}{H}=0.1\mathrm{s}$，故反馈系数 $H=0.3$。

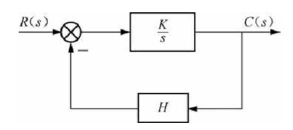


图 3.10　例 3-1 系统的结构图

【思考题】　为什么一阶系统在输入信号为单位阶跃信号和输入信号为单位斜坡信号时系统的稳态误差会有所差别？

3.3　二阶系统分析

3.3.1　二阶系统数学模型及单位阶跃响应

凡以二阶微分方程作为数学模型的控制系统称为二阶系统。在工程实践中，二阶系统有许多典型应用，而且很多高阶系统的特性在一定条件下也可以用二阶系统的特性来表征。因此，二阶系统的分析在自动控制原理中具有普遍的意义。

1. 二阶系统的数学模型

二阶系统的动态结构图如图 3.11 所示，其闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3-17}$$

式(3-17)中，ω_n 为无阻尼自然振荡频率，ξ 为阻尼比。它们均为二阶系统的参数，但在不同的系统中，ω_n 和 ξ 所代表的具体物理量是不同的。

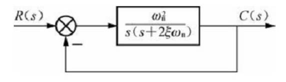


图 3.11　二阶系统的典型结构

2. 二阶系统的单位阶跃响应

二阶系统在单位阶跃信号 $r(t)=1(t)$ 作用下，输出的拉氏变换为

$$C(s)=\Phi(s)\times R(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s} \tag{3-18}$$

对于二阶系统来讲，其特征方程为

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$$

解之得

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1} \tag{3-19}$$

当阻尼比 ξ 取不同值时，对应的特征根 s_1 和 s_2 可能是实数根、复数根或重根，相应的单位阶跃响应的形式也会有所不同，分别讨论如下。

（1）$\xi>1$（过阻尼）。

$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ 为两个不相等的负实数根。

$$C(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s-s_1)(s-s_2)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s-s_1}+\frac{A_3}{s-s_2}$$

经拉氏反变换得

$$c(t)=A_1+A_2e^{s_1t}+A_3e^{s_2t}$$

其中 A_1、A_2 和 A_3 为待定系数，显然，响应特性包含了两个单调衰减的指数项，因此，系统输出随时间 t 单调上升，无振荡和超调，并且最终趋近于稳态值 A_1。

（2）$\xi=1$（临界阻尼）。

此时，$s_{1,2}=-\omega_n$ 为一对重负实根，输出的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s+\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$$

经拉氏反变换得

$$c(t)=1-e^{-\omega_nt}\omega_nt-e^{-\omega_nt}=1-e^{-\omega_nt}(1+\omega_nt)\ (t\geqslant0) \tag{3-20}$$

输出响应单调上升，无振荡和超调，但时比过阻尼时的响应快。

（3）$0<\xi<1$（欠阻尼）。

此时有 $s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$，令 $\sigma=\xi\omega_n$，$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$。$\sigma$ 称为衰减系数，ω_d 称为阻尼振荡频率，则有

$$s_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_d$$

单位阶跃响应

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^{\ 2}}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^{\ 2}}-\frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^{\ 2}}$$

经拉氏反变换可得

$$c(t)=1-e^{-\xi\omega_nt}\left[\cos\omega_dt+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_dt\right]$$

设二阶系统的一对共轭复数根如图 3.12 所示。由图可得

$$\tan\beta=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi},\cos\beta=\xi,\sin\beta=\sqrt{1-\xi^2}$$

则欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应可写为

$$c(t)=1-e^{-\xi\omega_nt}\left[\cos\omega_dt+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_dt\right]$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_dt+\beta)\ (t\geqslant0) \tag{3-21}$$

式(3-21)中的 $\beta=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=\arccos\xi$。

由此可见，欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应由两部分组成：稳态分量为1，表明系统在单位阶跃函数作用下不存在稳态误差；瞬态分量为阻尼正弦振荡，振荡频率为 ω_d，因此称为阻尼振荡频率。瞬态分量衰减的程度取决于包络线 $1 \pm e^{-\xi\omega_n t}/\sqrt{1-\xi^2}$ 收敛的速度，当 ξ 一定时，包络线的收敛速度又取决于 $e^{-\xi\omega_n}$ 的幂，因此 $\sigma=\xi\omega_n$ 称为衰减系数。

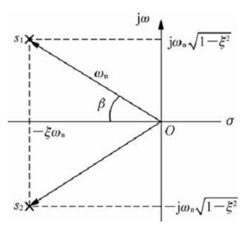


图 3.12 欠阻尼二阶系统参数之间的关系

（4）$\xi=0$（无阻尼）。

当 $\xi=0$ 时，$s_{1,2}=\pm j\omega_n$ 为一对纯虚根。输出的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+\omega_n^{\ 2}}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^{\ 2}}$$

则二阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-\cos\omega_n t \quad (t\geqslant 0) \tag{3-22}$$

这是一条平均值为1的正弦形式的等幅振荡曲线，其振荡频率为 ω_n，因此 ω_n 被称为无阻尼自然振荡频率。

图3.13为取不同阻尼比时的单位阶跃响应曲线。由图可见，ξ 越大，系统的平稳性越好，超调量越小；ξ 越小，输出响应振荡加强，振荡频率越高。

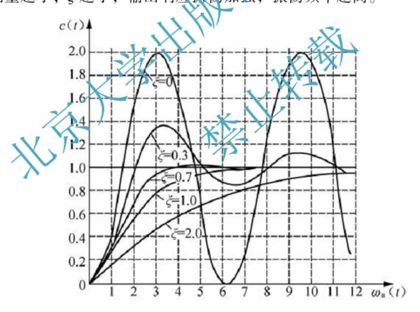


图 3.13 不同阻尼比时系统的单位阶跃响应

3.3.2 二阶系统的性能指标

由于过阻尼和欠阻尼系统不存在超调量和震荡，因此下面主要针对欠阻尼系统的动态过程进行分析，其单位阶跃响应曲线如图3.6所示。

1. 上升时间 t_r

令 $c(t_r)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t_r+\beta)=0$，即 $\omega_d t_r+\beta=\pi$，所以上升时间 t_r 为

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d} \tag{3-23}$$

2. 峰值时间 t_p

令 $\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$ 可得

$$\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)-\omega_d e^{\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t+\beta)=0$$

$$\tan(\omega_d t+\beta)=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

由于 $\tan\beta=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$，所以 $\omega_d t_p=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$，根据峰值时间定义，应取 $\omega_d t_p=\pi$，即

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d} \tag{3-24}$$

3. 超调量 $\sigma\%$

超调量在峰值时间发生，故 $c(t_p)$ 即为最大输出，将 t_p 代入得

$$c(t_p)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t_p}\sin(\omega_d t_p+\beta)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\sin(\pi+\beta)$$

由于 $\sin(\pi+\beta)=-\sin\beta=-\sqrt{1-\xi^2}$，所以 $c(t_p)=1+e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$，考虑到 $c(\infty)=c(t)|_{t\to\infty}=1$，则超调量为

$$\sigma\%=\frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}\times100\%=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\% \tag{3-25}$$

4. 调节时间 t_s

求调节时间可用近似公式

$$t_s\approx\frac{3}{\xi\omega_n}\quad(\xi<0.68)\quad 按\pm5\%误差 \tag{3-26}$$

$$t_s\approx\frac{4}{\xi\omega_n}\quad(\xi<0.76)\quad 按\pm2\%误差 \tag{3-27}$$

由此可见，调节时间 t_s 与特征根实部的大小成反比。

当 ξ 大于以上数值时，可采用近似公式计算，即

$$t_s\approx\frac{1}{\omega_n}(6.45\xi-1.7) \tag{3-28}$$

5. 稳态误差 e_{ss}

由稳态误差的定义可得

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to0}s\cdot[R(s)-C(s)] \tag{3-29}$$

当输入为单位阶跃信号即 $R(s)=\dfrac{1}{s}$时，有

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}s\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}\cdot\frac{1}{s}\right]=0$$

当输入为单位斜坡信号即 $R(s)=\dfrac{1}{s^2}$时，有

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}s\cdot\left[\frac{1}{s^2}-\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}\cdot\frac{1}{s^2}\right]=\frac{2\xi}{\omega_n} \tag{3-30}$$

以上为欠阻尼二阶系统在单位阶跃输入作用下性能指标的求取。对于过阻尼二阶系统，其性能指标只有调节时间 t_s 和稳态误差 e_{ss}。e_{ss}的计算同上，而调节时间 t_s 的近似计算式，是根据特征根 s_1 和 s_2 中绝对值较小者来确定的。假设 $|s_1|<|s_2|$，则设 $T_1=\dfrac{-1}{s_1}$，

$$t_s=3T_1 \quad (\text{当}\ 4|s_1|<|s_2|,\text{即}\ \xi>1.25\ \text{时}) \tag{3-31}$$

$$t_s=4.75T_1 \quad (\text{当}\ |s_1|=|s_2|,\text{即}\ \xi=1\ \text{时}) \tag{3-32}$$

当 ξ 在 1 ~ 1.25 之间取值时，t_s 可在 $4.75T_1\sim3T_1$ 之间取值。

综合来看，二阶系统的性能分析可总结如下：

（1）平稳性：主要由阻尼比 ξ 决定，ξ 越大，则超调量 $\sigma\%$ 越小，系统平稳性好。

（2）快速性：当 ω_n 一定时，若 ξ 较小，则调节时间 t_s 较大，而当 $\xi>0.7$ 之后，ξ 越大，t_s 也越大。因此 ξ 过大或过小，均导致系统快速性变差。

（3）准确性：ξ 的增加和 ω_n 的减小有利于系统的平稳性，但将使得系统跟踪斜坡信号的误差增加。

【例 3-2】 已知系统的闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{K}{s^2+3s+4}$，分别求参数 $K=4$、$K=2$ 时，系统的单位阶跃响应和性能指标 $\sigma\%$ 和 t_s。

解：（1）当 $K=4$ 时，由于 $\Phi(s)=\dfrac{2}{s^2+3s+4}$，所以

$$\begin{cases}\omega_n^{\ 2}=4\\ 2\xi\omega_n=3\end{cases}$$

解之得 $\omega_n=2$，$\xi=0.75<1$，系统为欠阻尼状态。

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)=1-1.51e^{-1.5t}\sin(1.32t+41.4°)$$

超调量 $\sigma\%=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%=2.8\%$，调节时间 $t_s\approx\dfrac{4}{\xi\omega_n}=2.67s$（按 ±2%误差）。

（2）当 $K=2$ 时，由于 $\Phi(s)=\dfrac{2}{s^2+3s+2}$，可得 $\omega_n=\sqrt{2}$，$\xi=1.06>1$，系统为过阻尼状态。

$$C(s)=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

单位阶跃响应 $c(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}$，超调量 $\sigma\%=0$，调节时间 $t_s\approx 4T_1=4\times 1s=4s$。

系统的时域响应曲线如图 3.14 所示。

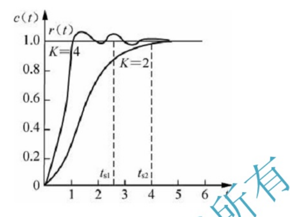


图 3.14　系统的时域响应曲线

3.3.3　带零点的二阶系统的单位阶跃响应

具有闭环零点的二阶系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}&=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\\&=\frac{\omega_n^2\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau}(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\\&=\frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\end{aligned}\qquad(3-33)$$

式(3-33)中，τ 为时间常数，$z=\frac{1}{\tau}$为闭环零点的模值。

设 $C_1(s)=\frac{\omega_n^2R(s)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，则有

$$C(s)=C_1(s)+\frac{s}{z}C_1(s)\qquad(3-34)$$

由拉氏变换的性质可得

$$c(t)=c_1(t)+\frac{1}{z}\frac{dc_1(t)}{d(t)}$$

其中 $c(t)=L^{-1}[C(s)]$，$c_1(t)=L^{-1}[C_1(s)]$。设 $R(s)=\frac{1}{s}$，当 $0<\xi<1$ 时，有

$$c_1(t)=L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\right]=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$$\frac{dc_1(t)}{dt}=\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}[\xi\omega_n\sin(\omega_d t+\beta)-\omega_d\cos(\omega_d t+\beta)]$$

因此

$$c(t)=c_1(t)+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}(t)}=1-\frac{\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{z}[(z-\xi\omega_n)\sin(\omega_d t+\beta)+\omega_d\cos(\omega_d t+\beta)]$$

$$=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{l}{z}\left[\frac{(z-\xi\omega_n)}{l}\sin(\omega_d t+\beta)+\frac{\omega_d}{l}\cos(\omega_d t+\beta)\right] \quad (3-35)$$

其中 ω_d、β 与典型二阶系统相同，l 为零点与极点之间的距离，如图 3.15 所示。

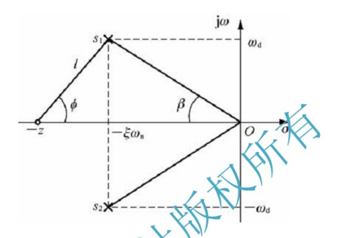


图 3.15 零、极点分布图

由于 $l=|z-s_1|=\sqrt{(z-\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}$，可得 $\frac{|z-\xi\omega_n|}{l}=\cos\phi$，$\frac{\omega_d}{l}=\sin\phi$，代入式（3-35）可得

$$c(t)=1-\frac{\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{l}{z}[\sin(\omega_d t+\beta)\cos\phi+\cos(\omega_d t+\beta)\sin\phi]$$

$$=1-\frac{\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{l}{z}\sin(\omega_d t+\beta+\phi) \quad (3-36)$$

式(3-36)为具有零点的二阶系统的单位阶跃响应。参照典型二阶系统求性能指标的方法，可以求出该系统的性能指标为

$$\sigma\% = \frac{l}{z}\mathrm{e}^{\frac{-\xi(\pi-\phi)}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%$$

$$t_r=\frac{\pi-(\phi+\beta)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_s=\left[3+\ln\left(\frac{l}{z}\right)\right]\frac{1}{\xi\omega_n} \quad (\text{按}\pm 5\%\text{误差})$$

$$t_s=\left[4+\ln\left(\frac{l}{z}\right)\right]\frac{1}{\xi\omega_n} \quad (\text{按}\pm 2\%\text{误差})$$

与标准二阶系统相比，增加零点后，上升时间减短，系统的初始响应加快。另外，由于零点的存在，系统的振荡性增加。零点的模值 z 越小，或零点与极点间的距离越大，则系统的超调量越大，振荡越强烈。

3.3.4　改善二阶系统性能的措施

通过对二阶系统的分析得知，系统的平稳性和快速性对系统结构和参数的要求往往是矛盾的。工程中常通过在系统中增加一些合适的附加装置来改善二阶系统的性能。

1. 比例微分控制

图 3.16 为采用比例微分控制的二阶系统。二阶系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{(\tau s+1)\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

系统相当于增加了一个开环零点，其闭环传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}&=\frac{(\tau s+1)\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\tau\omega_n^{\ 2}s+\omega_n^{\ 2}}\\&=\frac{(\tau s+1)\omega_n^{\ 2}}{s^2+(2\xi\omega_n+\tau\omega_n^{\ 2})s+\omega_n^{\ 2}}\\&=\frac{(\tau s+1)\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi'\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}\end{aligned}\tag{3-37}$$

其中

$$2\xi'\omega_n=2\xi\omega_n+\tau\omega_n^{\ 2}$$

$$\xi'=\xi+\frac{\tau\omega_n}{2}>\xi\tag{3-38}$$

式(3-38)中 ξ' 称为等效阻尼比。

图 3.16　比例微分控制的二阶系统

由式（3-37）和式（3-38）可见，采用比例微分控制，即增加了开环零点后，闭环传递函数的分子和分母都发生了变化。由分母的变化可知，二阶系统的阻尼比增大，超调量将减少。同时，由分子的变化可得出，若传递函数中增加的零点合适，将使得系统响应加快。另外，在单位斜坡输入之下，即当 $R(s)=\frac{1}{s^2}$ 时，由式(3-29)可以算得 $e_{ss}=\frac{2\xi}{\omega_n}$，与没有采用比例微分控制的标准二阶系统相同。

没有采取性能改善措施之前，系统的单位阶跃响应曲线如图 3.17 中曲线 a 所示，采用比例微分控制后系统性能的改善如图 3.17 中曲线 b 所示。

2. 微分负反馈控制

在二阶系统中加入微分负反馈环节，如图 3.18 所示。这时系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\tau\omega_n^{\ 2}s}$$

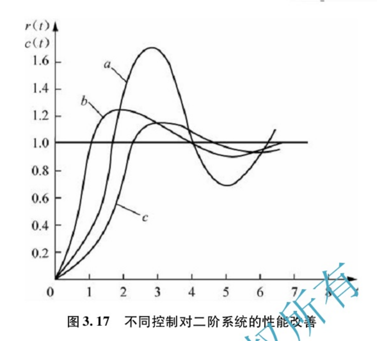


图 3.17 不同控制对二阶系统的性能改善

闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+(2\xi\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi'\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3-39}$$

所以 $2\omega_n\xi'=2\xi\omega_n+\tau\omega_n^2$，即

$$\xi'=\xi+\frac{\tau\omega_n}{2} \tag{3-40}$$

式中 ξ' 称为等效阻尼比。

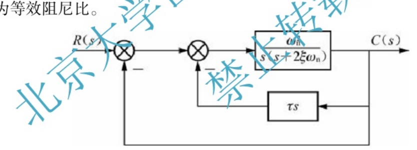


图 3.18 加微分负反馈的二阶系统

由式(3－40)可见，与加微分负反馈之前相比，系统的阻尼比增大，超调量减少，平稳性变好。阻尼比较小时，在 ω_n 不变的前提下，阻尼比的加大，将使 t_s 减少。另外，若输入为单位斜坡信号，即当 $R(s)=\frac{1}{s^2}$ 时，由式(3－29)可以算得 $e_{ss}=\frac{2\xi}{\omega_n}+\tau$，比标准形式的二阶系统增加了 τ。但只要适当地选取系统参数，就可同时满足动态和稳态性能的要求。加入微分负反馈对系统性能的影响如图 3.17 中曲线 c 所示。

【思考题】 为什么大多数二阶系统都工作在欠阻尼情况下?

3.4 高阶系统性能分析

三阶及三阶以上的系统通常称为高阶系统。其传递函数的一般表达式为



$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\quad(n\geqslant m)\tag{3-41}$$

零点、极点形式的表达式为

$$\Phi(s)=\frac{K_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}\quad(n\geqslant m)\tag{3-42}$$

式中，$s=z_1$，z_2，…，z_m 为 $\Phi(s)$ 的零点，$s=s_1$，s_2，…，s_n 为 $\Phi(s)$ 的极点，$K_0=\frac{b_0}{a_0}$。

设输入为 $R(s)=\frac{1}{s}$，则有 $C(s)=\frac{K_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}\cdot\frac{1}{s}$，假设系统无重极点，按部分分式展开，可以得到

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}\tag{3-43}$$

其中 A_0，A_1，A_2，…，A_n 为待定系数。

对式(3-43)求拉氏反变换，得到的输出响应为

$$c(t)=A_0+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_ne^{s_nt}\tag{3-44}$$

A_0 表示由输入引起的输出稳态分量；其他各项表示输出瞬态分量，它们衰减的快慢，取决于各项所对应极点的负实部值(实部为正时，系统不稳定)。

根据待定系数法，可求得负实数极点 s_i 对应的瞬态分量

$$A_ie^{s_it}=\frac{K_0(s_i-z_1)(s_i-z_2)\cdots(s_i-z_m)}{(s_i-s_1)\cdots(s_i-s_{i-1})(s_i-s_{i+1})\cdots(s_i-s_n)s_i}e^{s_it}\tag{3-45}$$

可见，对应的瞬态分量按指数衰减，其系数与该极点到零点的距离成正比，与该极点到其他极点的距离以及该极点到虚轴的距离成反比。

共轭复数极点 s_k、s_{k+1} 对应的瞬态分量为

$$A_ke^{s_kt}+A_{k+1}e^{s_{k+1}t}$$

其中 $s_k=\sigma+j\omega$，$s_{k+1}=\sigma-j\omega$ $(\sigma<0)$。考虑到系数 A_k，A_{k+1} 也是共轭复数，可表示为

$$A_k=|A_k|e^{j\angle A_k},A_{k+1}=|A_k|e^{-j\angle A_k}$$

由欧拉公式可得

$$A_ke^{s_kt}+A_{k+1}e^{s_{k+1}t}=2|A_k|e^{\sigma t}\cos(\omega t+\angle A_k)$$

可见，由一对共轭复数极点产生的瞬态分量是振幅按指数衰减的正弦振荡曲线。

由上述分析可以得出以下结论：

高阶系统的时域响应由惯性环节和二阶振荡环节的响应函数所组成。其中，稳态分量由输入控制信号所引起，瞬态分量的形式取决于传递函数的极点。

所有闭环极点必须位于 S 左半平面系统才能稳定。如果有一个极点位于 S 右半平面，则输出响应中将有一项是发散的，系统就不稳定。

极点的实部越负，即在 S 左半平面上，离虚轴越远，则相应的瞬态分量衰减越快；反之，在左半平面上，离虚轴很近的极点，其对应的瞬态分量衰减就很慢，它在总的瞬态分量中占据主导地位。

如果系统中有一个极点或一对共轭复数极点离虚轴最近，且其附近没有零点，其他极点离虚轴的距离比这一个或一对极点离虚轴的距离大三倍以上，则称这一个或一对极点为主导极点。因为主导极点所决定的瞬态分量不仅持续时间长，而且初始幅值也大，

故可将系统的响应近似地看作由其所产生。

一个实际的高阶系统，其结构参数是确定的，不一定存在主导极点。但往往可以通过加入校正装置，改变其结构参数，使整个系统具有一对合适的共轭复数主导极点，因为此时系统的动态性能比较理想。

一对靠得很近的闭环零、极点称为偶极子。偶极子在系统动态响应中的分量很小，可以忽略不计。工程中，当一对零、极点之间的距离比它们到虚轴的距离小一个数量级时，就认为这一对零、极点是偶极子。

总之，对高阶系统进行分析时，可以在一定条件下，按照主导极点的概念，将系统近似处理成一阶或二阶系统，并作相应的平稳性、快速性分析，求出 $\sigma\%$ 和 t_s。而对任意阶系统，都可按照下节的方法进行稳定性分析和稳态误差分析。

【思考题】 怎样把高阶系统降阶成一阶或二阶系统?

3.5 系统稳定性分析

稳定是系统正常工作的首要条件。本节对线性定常系统的稳定性进行讨论。

3.5.1 稳定的数学条件及定义

控制系统在实际运行过程中，总会受到外界和内部一些因素的干扰。例如，负载和能源的波动、系统参数的变化、环境条件的改变等。这些因素总是存在的，如果系统设计时不考虑这些因素，设计出来的系统就会不稳定，那这样的系统是不成功的，需要重新设计，或调整某些参数或结构。

控制系统稳定性的严格定义和理论阐述是由俄国学者李雅普诺夫于 1892 年提出的，它主要用于判别时变系统和非线性系统的稳定性。

设一线性定常系统原处于某一平衡状态，若它瞬间受到某一扰动作用而偏离了原来的平衡状态，当此扰动撤销后，系统仍能回到原有的平衡状态，则称该系统是稳定的。反之，系统为不稳定。可见，线性系统的稳定性取决于系统的固有特征(结构、参数)，与系统的输入信号无关。

基于稳定性研究的问题是扰动作用去除后系统的运动情况，它与系统的输入信号无关，只取决于系统本身的特征，因而可用系统的脉冲响应函数来描述。由于单位脉冲函数的拉氏反变换等于 1，所以系统的脉冲响应就是系统闭环传递函数的拉氏反变换。

设系统传递函数的一般表达式如式(3-42)所示，假设系统无重极点，对该式按部分分式展开，并取拉氏反变换，可得理想单位阶跃响应

$$c(t)=L^{-1}[\Phi(s)]=A_0+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_ne^{s_nt} \tag{3-46}$$

其中，第一项为由输入引起的输出稳态分量，其余各项均为系统输出的瞬态分量。显然，处于平衡状态下的稳定系统，其输出瞬态分量应该均为零。由式 (3-46) 可知，要做到这一点，必须满足 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{s_it}\to 0$。

所以，系统稳定的充分必要条件是，系统所有特征根的实部小于零，即其特征方程的根都在 S 左半平面。

3.5.2 劳斯稳定判据

求得特征方程的根，再根据稳定的充分必要条件，就可判定系统的稳定性。但对于高阶系统，求解方程的根较困难。如果仅仅为了判断系统的稳定性，可根据特征方程的各项系数来确定方程的根是否具有正实部，这就是劳斯稳定判据的基本思想。劳斯稳定判据是根据闭环特征方程式的各项系数，按一定的规则排列成所谓的劳斯表，然后根据表中第一列系数正、负符号的变化情况来判别系统的稳定性。

设系统的闭环特征方程为 $a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$，根据特征方程的各项系数排列成如下劳斯表

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

其中

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

可见，表中前两行由间隔取特征方程中系数形成，从第三行开始，各元素按上述规律推算。劳斯稳定判据为：若特征方程式的各项系数都大于零(必要条件)，且劳斯表中第一列元素均为正值，则所有的特征根均位于 S 左半平面，相应的系统稳定的；否则，系统不稳定，且第一列元素符号改变的次数等于该特征方程的正实部根的个数。

【例 3-3】 设系统的特征方程为 $s^4+2s^3+3s+4s+5=0$，试用劳斯判据判别该系统的稳定性。

解：列该系统劳斯表为

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & \dfrac{2\times3-1\times4}{2}=1 & \dfrac{2\times5-1\times0}{2}=5 & 0 \\
s^1 & \dfrac{1\times4-2\times5}{2}=-6 & 0 & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

由于劳斯表中第一列元素的符号改变了两次，说明系统有两个正实部根，系统不稳定。

【例 3-4】 设系统的闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)+K}$，要使系统稳定，试确定放大倍数 K 的取值范围。

解：系统的特征方程为 $s^3+14s^2+40s+40K=0$，列劳斯表为

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 40 \\
s^2 & 14 & 40K \\
s^1 & (560-40K)/14 & \\
s^0 & 40K &
\end{array}
$$

系统稳定的条件是$\begin{cases}560-40K>0\\40K>0\end{cases}$，所以使系统稳定的条件是 $0<K<14$。

下面分析几种劳斯稳定判据的特殊情况。

（1）如果劳斯表中某行的第一个元素为零，而该行中其余各元素不等于零或没有其他元素，将使得劳斯表无法往下排列。此时，可用一个接近于零的很小的正数 ε 来代替零，完成劳斯表的排列。

【例 3-5】 设系统的特征方程为 $s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$，试用劳斯稳定判据判别该系统的稳定性。

解：列劳斯表为

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 2 & 2 & \\
s^2 & \varepsilon & 1 & \\
s^1 & \dfrac{2\varepsilon-2}{\varepsilon} & 0 & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

当 $\varepsilon\to0$，$\dfrac{2\varepsilon-2}{\varepsilon}\to-\infty$，劳斯表第一列系数数值符号改变两次，有两个根位于 S 右半平面，系统不稳定。

（2）如果劳斯表中某一行的元素全为零，表示相应方程中含有大小相等、符号相反的实根和(或)共轭根。此时，应以上一行的元素为系数，构成一辅助多项式，该多项式

对 s 求导后，所得多项式的系数即可用来取代全零行。同时，由辅助方程可以求得这些根。

【例3-6】 系统特征方程为 $s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$，试用劳斯稳定判据判别该系统的稳定性。

解：列劳斯表为

$$
\begin{array}{lllll}
s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
s^5 & 2 & 12 & 16 & \\
s^4 & 2 & 12 & 16 & \\
s^3 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

由于 s^3 这一行的元素全部为零，使得劳斯表无法往下排列。此时，可由上一行的元素作为系数组成辅助多项式，即

$$P(s)=2s^4+12s^2+16$$

将 $P(s)$ 对 s 求导得 $P'(s)=8s^3+24s$。用系数8和24代替全零行中的0元素，可得

$$
\begin{array}{lllll}
s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
s^5 & 2 & 12 & 16 & \\
s^4 & 2 & 12 & 16 & \\
s^3 & \mathbf{8} & \mathbf{24} & & \\
s^2 & 6 & 16 & & \\
s^1 & \frac{8}{3} & & & \\
s^0 & 16 & & &
\end{array}
$$

由此可知，第一列元素的符号没有变化，表明该特征方程在 S 右半平面上没有特征根。但 s^3 这一行的元素全为零，表示有大小相等、符号相反的根。令 $P(s)=0$，便构成了辅助方程，解此方程便可得到两对根 $\pm\mathrm{j}\sqrt{2}$ 和 $\pm\mathrm{j}2$。显然，系统临界稳定。

另外，劳斯表中某行的元素同乘以某数，不影响对系统稳定性的判断。

3.5.3 结构不稳定问题

如果无论怎样调整系统的参数，也无法使其稳定，则称这类系统为结构性不稳定系统。如图3.19所示的系统，其闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{Ts^3+s^2+K}$$

特征方程为

$$Ts^3+s^2+K=0$$

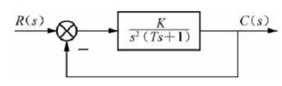


图3.19 结构不稳定的系统结构图

根据劳斯稳定判据，由于特征方程中 s 一次项的系数为零，即缺项，故不论 K 取何值，该方程总是有根不在 S 左半平面，即系统总是不稳定。这类系统称为结构性不稳定系统。解决这个问题的办法一般有以下两种。

1. 改变积分环节的性质

用比例反馈来包围有积分作用的环节。例如，在积分环节外面加单位负反馈，如图 3.20(a)，这时，环节的传递函数变为

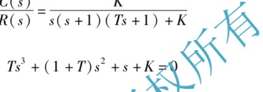
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{s+1}$$

从而使原来的积分环节变成了惯性环节。图 3.20(b)所示系统中的一个积分环节加上单位负反馈后，系统开环传递函数变成了

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(Ts+1)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+1)(Ts+1)+K}$$



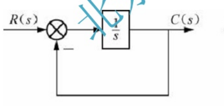
特征方程为

$$Ts^3+(1+T)s^2+s+K=0$$

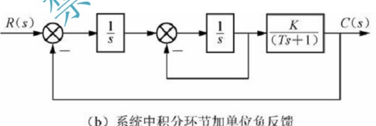
列劳斯表为

$$\begin{array}{lll} s^3 & T & 1 \\ s^2 & 1+T & K \\ s^1 & \dfrac{(1+T-TK)}{1+T} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

由劳斯稳定判据，系统稳定的条件为$\begin{cases}1+T-TK>0\\K>0\end{cases}$。所以，$K$ 的取值范围为 $0<K<1+\frac{1}{T}$。可见，此时只要选取合适的 K 值就可使系统稳定。



(a) 积分环节加单位负反馈



(b) 系统中积分环节加单位负反馈

图 3.20　改变积分环节性质

2. 加入比例微分环节

如图 3.21 所示，在前述结构性不稳定系统的前向通路中加入比例微分环节，系统的闭环传递函数变为

$$\Phi(s)=\frac{K(\tau s+1)}{Ts^3+s^2+K\tau s+K}$$

劳斯表为

$$
\begin{array}{llll}
s^3 & T & K\tau \\
s^2 & 1 & K \\
s^1 & K(\tau - T) & \\
s^0 & K &
\end{array}
$$

系统稳定的条件为$\begin{cases}\tau - T > 0 \\ K > 0\end{cases}$，只要选取合适的系统参数，便可使系统稳定。

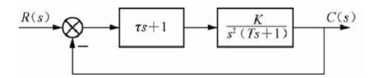


图 3.21　系统中加入比例微分环节

【思考题】　加入比例微分环节之后对系统的动态性能有没有影响？

3.6　系统稳态误差分析

3.6.1　误差与稳态误差

系统误差的一般定义为期望值与实际值的差值，即 $e(t) = r(t) - c(t)$。通常，系统的输入量和输出量为不同的物理量，因此系统的误差不直接用它们的差值来表示，而是用输入量与反馈量的差值来定义，如图 3.22 所示，即

$$e(t) = r(t) - b(t) \tag{3-47}$$

输入量代表了期望值，输出量则表示了实际值。对于单位反馈系统来说，反馈量 $b(t)$ 就等于输出量 $c(t)$。

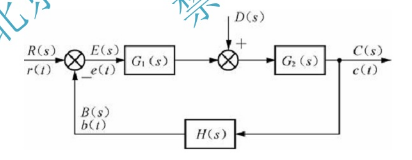


图 3.22　控制系统的典型结构

误差 $e(t)$ 反映了系统跟踪输入信号 $r(t)$ 和抑制干扰信号 $d(t)$ 的过程精度，而稳态误差是指系统进入稳态后的误差值，即

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) \tag{3-48}$$

稳态误差表征了系统的最终控制精度，它包含由给定信号引起的误差和由扰动信号引起的误差。计算时，不必解出误差响应 $e(t)$，而可以直接运用拉氏变换的终值定理求解。

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) \tag{3-49}$$

显然，计算 e_{ss} 应首先求出误差的拉氏变换 $E(s)$。根据第二章中的 2.5.3 节可知

$$E(s) = \Phi_{er}(s)R(s) + \Phi_{ed}(s)D(s) \tag{3-50}$$

式中，$\Phi_{er}(s)$ 为系统在输入信号作用下的误差传递函数，$\Phi_{ed}(s)$ 为系统在干扰作用下的误差传递函数，将式（3-50）代入式（3-49）即可求出系统的总误差。

由式（3-50）可以看出，系统的稳态误差不仅和系统的结构参数有关，而且与外作用信号 $r(t)$、$d(t)$ 的大小及其形式有关。分析计算时必须具体指明。

3.6.2 给定信号作用下系统稳态误差的计算

考虑给定信号 $R(s)$ 作用时，设扰动信号 $D(s)=0$。根据图 3.22，可得误差函数的拉氏变换为

$$E_r(s) = \Phi_{er}(s) \cdot R(s) = \frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

根据终值定理得

$$e_{ssr} = \lim_{t\to\infty} e_r(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E_r(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{3-51}$$

当系统的输入为位置、速度、加速度等典型形式时，设系统输入的一般表达式为

$$R(s) = \frac{A}{s^N} \tag{3-52}$$

式中 A 为常数，N 为输入信号的阶次。

设系统开环传递函数写成如式（3-53）所示的尾项为 1 的形式

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)} \quad (n \geqslant m) \tag{3-53}$$

式中 K 为系统的开环增益，即开环传递函数中各因式的常数项为 1 时的总比例系数。τ_i，T_j 为时间常数，ν 为积分环节的个数，由它表征系统的类型数，或称其为系统的无差度。对应于 $\nu=0$、1、2 的系统，分别称为 0 型、Ⅰ型、Ⅱ型系统。由于Ⅱ型以上的系统实际上很难稳定，因此在工程中很难遇到。

将式（3-52）、式（3-53）代入到式（3-51）可得，系统的稳态误差可表示为

$$e_{ssr} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{\frac{A}{s^N}}{1+\frac{K}{s^{\nu}}} \tag{3-54}$$

式（3-54）表明，系统的稳态误差除与外作用 $R(s)$ 有关外，还与系统的开环增益 K 及系统的型别 ν 有关，而与系统的时间常数 τ 和 T 无关。下面对不同的输入信号进行讨论。

1. 阶跃输入下的稳态误差

设阶跃输入信号 $r(t)=R_0 \cdot 1(t)$，相应的拉氏变换为 $R(s)=\frac{R_0}{s}$，由式(3-54)得

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{\frac{R_0}{s}}{1+G(s)H(s)}=\frac{R_0}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)H(s)} \quad (3-55)$$

定义静态位置误差系数 K_p

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu}} \quad (3-56)$$

代入式（3－55）得

$$e_{ssr}=\frac{R_0}{1+K_p} \quad (3-57)$$

显然，$\nu=0$ 时，$K_p=K$，$e_{ssr}=\frac{R_0}{1+K}$；$\nu\geqslant 1$ 时，$K_p=\infty$，$e_{ssr}=0$。

可见，在阶跃输入作用下，仅 0 型系统有稳态误差，其大小与阶跃输入的幅值成正比，与系统的开环增益 K 近似成反比。对Ⅰ型及Ⅰ型以上系统来说，其稳态误差为零。

图 3.23 给出了不同型别时系统的阶跃响应曲线。

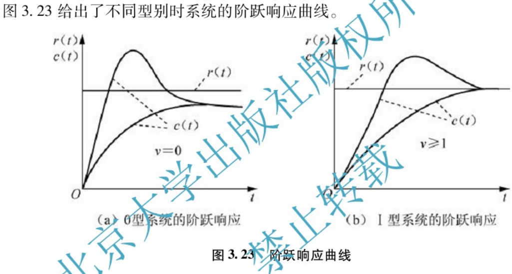


图 3.23 阶跃响应曲线

2. 斜坡输入下的稳态误差

设斜坡输入信号为 $r(t)=v_0t$，相应的拉氏变换为 $R(s)=\frac{v_0}{s^2}$，由式(3－51)得

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{\frac{v_0}{s^2}}{1+G(s)H(s)}=\frac{v_0}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)} \quad (3-58)$$

定义静态速度误差系数 K_ν

$$K_\nu=\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-1}} \quad (3-59)$$

代入式（3－58）得

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{v_0}{K}s^{\nu-1}=\frac{v_0}{K_\nu} \quad (3-60)$$

可见，$\nu=0$ 时，$K_\nu=0$，$e_{ssr}=\infty$；$\nu=1$ 时，$K_\nu=K$，$e_{ssr}=\frac{v_0}{K}$；$\nu\geqslant 2$ 时，$K_\nu=\infty$，$e_{ssr}=0$。

可见，在斜坡输入之下，0 型系统的输出量不能跟踪其输入量的变化，这是因为它的输出量的速度小于输入量的速度，致使两者的差距不断加大，稳态误差趋于无穷大。稳态时，Ⅰ型系统的输出量与输入量虽以相同的速度变化，但前者较后者在位置上落后一个常量，这个常量就是稳态误差。Ⅱ型系统的输出量与输入量不仅速度相等，而且位置相同。

图 3.24 给出了不同型别时系统的斜坡响应曲线。

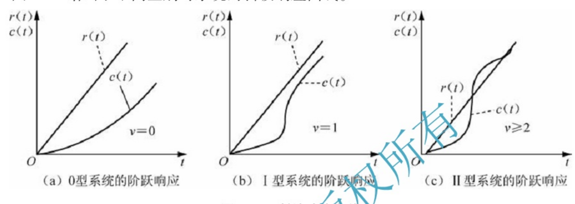


图 3.24 斜坡响应曲线

3. 等加速度输入下的稳态误差

设等加速度输入信号为 $r(t)=\frac{1}{2}a_0t$，相应的拉氏变换为 $R(s)=\frac{a_0}{s^3}$，由式(3－51)得

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{\frac{a_0}{s^3}}{1+G(s)H(s)}=\frac{a_0}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)} \tag{3-61}$$

定义静态加速度误差系数 K_a

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-2}} \tag{3-62}$$

代入式（3－61）得

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{a_0}{K}s^{\nu-2}=\frac{a_0}{K_a} \tag{3-63}$$

由式(3－63)可得，$\nu\leqslant 1$ 时，$K_a=0$，$e_{ssr}=\infty$；$\nu=2$ 时，$K_a=K$，$e_{ssr}=\frac{v_0}{K}$；$\nu\geqslant 3$ 时，$K_a=\infty$，$e_{ssr}=0$。

上述结论表明，0 型和Ⅰ型系统都不能跟踪抛物线输入信号，只有Ⅱ型系统能跟踪，但存在稳态误差。即在稳态时，系统输出和输入信号都以相同的速度和加速度变化，但输出在位置上要落后于输入一个常量。

图 3.25 给出了不同型别的系统，在抛物线输入信号作用下的响应曲线。

通过以上分析可知，提高开环增益或增加系统开环传递函数中的积分环节个数，即提高系统的型别，可改善其稳态精度。ν 型及以上型别的系统，可做到在 ν 阶以下阶次的输入之下无静差。但积分环节数增多，系统阶次增加，也容易引起不稳定。合理的解决这一矛盾，是控制系统设计的任务之一。一般是首先保证稳态精度，然后再采取某些校正措施改善系统的稳定性，此不赘述。



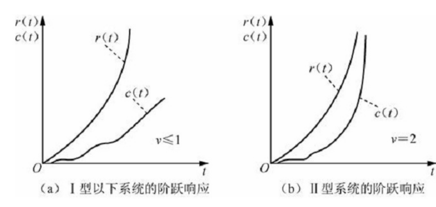


图 3.25　抛物线输入响应曲线

求系统的稳态误差，可根据稳态误差公式来求取，也可根据静态误差系数来求。下面举例说明。

【例 3-7】 已知系统的结构如图 3.26 所示，求 $R(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}$ 时系统的稳态误差。

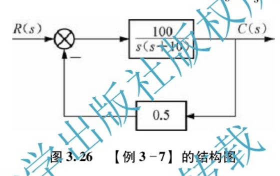


图 3.26　【例 3-7】的结构图

解：系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{100\times 0.5}{s(s+10)}=\frac{5}{s(0.1s+1)}$$

当 $R_1(s)=\frac{1}{s}$ 时，$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\frac{5}{s(0.1s+1)}=\infty$，$e_{ss1}=\frac{1}{1+K_p}=0$。

当 $R_1(s)=\frac{1}{s^2}$ 时，$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\,\frac{5}{s(0.1s+1)}=5$，$e_{ss2}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{5}$。

系统总的稳态误差 $e_{ssr}=e_{ss1}+e_{ss2}=\frac{1}{5}$。

【例 3-8】 分析位置随动系统的稳态误差。

解：(1) 随动系统的结构图可简化为图 3.27 所示的结构简图。

系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(T_m s+1)}$$

当输入信号 $\theta_r(s)=\frac{1}{s}$ 时，$e_{ss}=0$。

当输入信号 $\theta_r(s)=\frac{1}{s^2}$ 时，$e_{ss}=\frac{1}{K}$。

(2) 在系统的输入端增加一个比例微分环节，如图 3.28 所示。

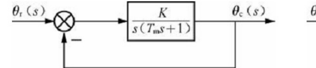


图 3.27 随动系统结构简图

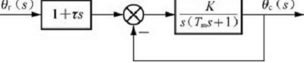


图 3.28 增加比例微分环节

系统的闭环传递函数为

$$\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)}=\frac{K(\tau s+1)}{T_m s^2+s+K}$$

可见，增加了一个闭环零点，成为非典型结构系统，其稳态误差为

$$E(s)=\theta_r(s)-\theta_c(s)=\theta_r(s)\left[1-\frac{K(1+\tau s)}{T_m s^2+s+K}\right]$$

$$=\frac{T_m s^2+s+K-K-K\tau s}{T_m s^2+s+K}\theta_r(s)$$

当 $\theta_r(s)=\frac{1}{s}$时，$e_{ss}=0$。

当 $\theta_r(s)=\frac{1}{s^2}$时，$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\frac{T_m s^2+s-K\tau s}{T_m s^2+s+K}\times\frac{1}{s^2}=\frac{1-K\tau}{K}$。

当 $\tau=\frac{1}{K}$时，$e_{ss}=0$。

可见，增加了闭环零点后，适当地选择参数可使系统的稳态误差减小。

（3）如果将比例微分环节加在前向通路中，如图 3.29 所示。

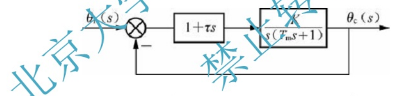


图 3.29 在前向通路中增加比例微分环节

系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(1+\tau s)}{s(T_m s+1)}$$

相当于系统增加了一个开环零点。

当输入信号 $\theta_r(s)=\frac{1}{s}$时，$e_{ss}=0$。

当输入信号 $\theta_r(s)=\frac{1}{s^2}$时，$e_{ss}=\frac{1}{K}$。

与原系统的稳态误差比较可知，增加开环零点对稳态误差没有影响。

3.6.3 扰动输入作用下系统稳态误差的计算

考虑扰动信号 $D(s)$作用时，设 $R(s)=0$，图 3.22 所示的系统通过结构变换可表示成如图 3.30 所示。

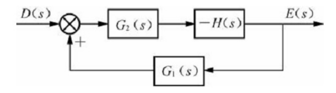


图 3.30 扰动信号作用下的系统结构

扰动信号引起的误差用 $e_{\rm d}(t)$ 来表示，其拉氏变换为

$$E_d(s)=\Phi_{ed}(s)D(s)=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot D(s)$$

当 $G_1(s)G_2(s)H(s)\gg 1$ 时，该式可近似为

$$E_{\rm d}(s)\approx -\frac{D(s)}{G_1(s)}$$

设

$$G_1(s)=\frac{K_1(\tau_1 s+1)\cdots}{s^{\nu_1}(T_1 s+1)\cdots}$$

由终值定理，扰动作用下的稳态误差为

$$e_{\rm ssd}=\lim_{t\to\infty}e_{\rm d}(t)=\lim_{s\to 0}sE_{\rm d}(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{-D(s)}{G_1(s)}=-\lim_{s\to 0}\frac{s^{\nu_1+1}}{K_1}D(s) \tag{3-64}$$

可见，扰动作用之下稳态误差的大小，除了与扰动信号 $D(s)$ 的形式与大小有关外，还与扰动作用点之前的传递函数 $G_1(s)$ 中积分环节的个数 ν_1 以及放大系数 K_1 有关。需要注意的是，稳态误差 $E_{\rm d}(s)$ 为负，表示反馈信号比输入信号大，这是由于 $D(s)$ 的加入使得输出量增大，反馈量也随之加大引起的。

【例 3-9】 设系统结构如图 3.22 所示，其中 $G_1(s)=\dfrac{10}{s+5}$，$G_2(s)=\dfrac{5}{s(3s+1)}$，$H(s)=2$，又设 $r(t)=2t$，$d(t)=0.5\cdot 1(t)$，求系统的稳态误差。

解： 系统的开环传递函数为

$$G_1(s)G_2(s)H(s)=\frac{50\times 2}{s(s+5)(3s+1)}=\frac{20}{s(0.2s+1)(3s+1)}$$

可见为Ⅰ型系统，$K=20$。因此当 $R(s)=\dfrac{2}{s^2}$ 时，系统稳态误差

$$e_{\rm ssr}=\frac{2}{K_{\rm v}}=\frac{2}{K}=\frac{2}{20}=0.1$$

由于

$$G_1(s)=\frac{10}{s+5}=\frac{2}{0.2s+1}$$

$\nu_1=0$，$K_1=2$。所以，当 $D(s)=\dfrac{0.5}{s}$ 时，扰动作用下的稳态误差为

$$e_{\rm ssd}=-\lim_{s\to 0}\frac{s^{\nu_1+1}}{K_1}D(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{s}{2}\cdot\frac{0.5}{s}=-0.25$$

系统总的稳态误差为

$$e_{\rm ss}=e_{\rm ssr}+e_{\rm ssd}=0.1-0.25=-0.15$$

3.6.4 稳态误差的抑制

系统的稳态误差主要是由积分环节的个数和放大系数来确定的。为了提高精度等级，可增加积分环节的数目，为了减小稳态误差，可增加放大系数。但这样都会使系统的稳定性变差。而采用补偿的方法，可在保证系统稳定的前提下减小稳态误差。

1. 引入输入补偿

系统如图3.31所示，为了减少给定信号引起的稳态误差，从输入端引入一个补偿环节 $G_c(s)$，这时系统的误差为

$$\begin{aligned}E(s)&=R(s)-C(s)=R(s)[1-\Phi(s)]\\&=R(s)\left[1-\frac{G_1(s)G_2(s)+G_2(s)G_c(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\right]\\&=\frac{1-G_2(s)G_c(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)\end{aligned}\tag{3-65}$$

可见，如果 $1-G_2(s)G_c(s)=0$，即取 $G_c(s)=\dfrac{1}{G_2(s)}$，则有 $E(s)=0$，就能实现所谓完全补偿，即完全消除由输入信号引起的稳态误差。由于补偿环节 $G_c(s)$ 位于系统闭环回路之外，它对系统闭环传递函数的分母不会产生任何影响，即系统的闭环稳定性不会因它的加入而发生变化。

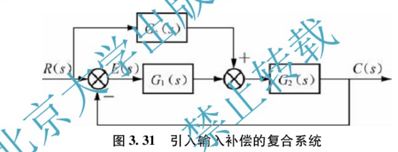


图3.31 引入输入补偿的复合系统

2. 引入扰动补偿

系统如图3.32所示，为了减小扰动信号引起的误差，利用扰动信号经过 $G_c(s)$ 进行补偿。设 $R(s)=0$，则扰动作用下的误差 $E(s)$ 为

$$E(s)=-C(s)=-\frac{G_2(s)[1+G_c(s)G_1(s)]D(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\tag{3-66}$$

可见，如果 $1+G_c(s)G_1(s)=0$，即取 $G_c(s)=-\dfrac{1}{G_1(s)}$，则有 $E(s)=0$，实现完全补偿。

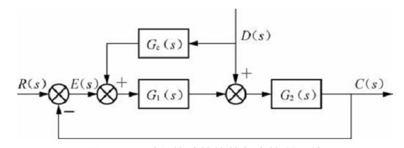


图3.32 引入扰动补偿的复合控制系统



在工程实践中，由于 $G_c(s)$ 物理实现上的原因，上述两种完全补偿的条件一般难于完全满足，而只能近似地实现。虽然在实践中采用的补偿是近似的，但它对改善系统的稳态性能仍产生十分有效的作用。

【思考题】 1. 为什么增加积分环节会使系统的稳定性变差？

2. 某输入信号作用下，若 $e_{ss}\to\infty$，是否说明系统不稳定？

3.7 用时域法分析系统性能示例

1. 单闭环有静差调速系统

只有一个反馈回路，存在稳态误差的调速系统称为单闭环有静差调速系统，其原理如图 3.33 所示。该系统由转速调节器、晶闸管整流器、直流电动机和测速发电机组成。

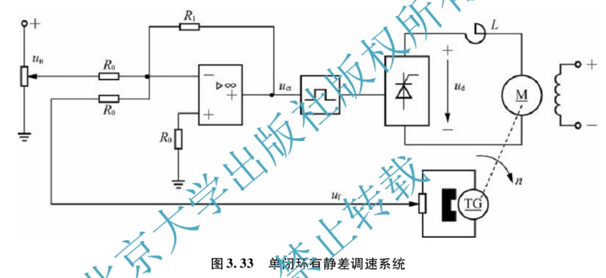


图 3.33 单闭环有静差调速系统

对应的动态结构图如图 3.34 所示。图中 K_p 为比例控制器系数，K_s 为晶闸管整流器与触发装置的电压放大系数，T_s 为晶闸管整流电路的延迟时间常数，T_a 为电动机的电磁时间常数，R_a 为电枢电阻，T_m 为机电时间常数，C_e 为反电动势系数，K_{sf} 为速度反馈系数。

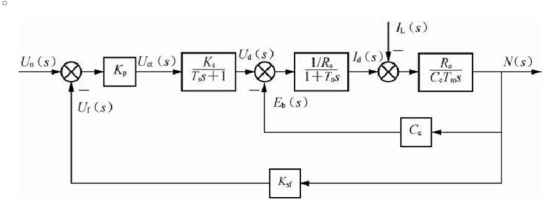


图 3.34 单闭环有静差调速系统的动态结构图

根据系统的动态结构图，可求出系统的传递函数。前向通路传递函数 $G(s)=\dfrac{K_pK_s/C_e}{(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_ss+1)}$，反馈通路传递函数 $H(s)=K_{sf}$，开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K_pK_sK_{sf}/C_e}{(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_ss+1)} \tag{3-67}$$

若 $T_m>4T_a$，则可对分母作因式分解得

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_ss+1)} \tag{3-68}$$

据式(3-67)可得闭环传递函数

$$\begin{aligned}\Phi(s)&=\frac{N(s)}{U_n(s)}=\frac{K_pK_s/C_e}{(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_ss+1)+K_pK_sK_{sf}/C_e}\\&=\frac{K_pK_s/C_e}{T_aT_mT_ss^3+(T_aT_m+T_mT_s)s^2+(T_m+T_s)s+1+K_pK_sK_{sf}/C_e}\end{aligned} \tag{3-69}$$

1）动态性能分析

设系统的参数为 $T_a=0.03\text{s}$，$T_m=0.2\text{s}$，$K_s=40$，$R_a=0.5\Omega$，$C_e=0.132\text{V}/(\text{r/m})$，$K_{sf}=0.07$，$T_s=0.00167\text{s}$。将参数代入闭环传递函数表达式(3-69)，可得

$$\Phi(s)=\frac{303.03K_p}{0.00001s^3+0.00633s^2+0.20167s+21.21K_p+1}$$

这是一个三阶系统，根据劳斯稳定判据，可得系统稳定的条件为

$$0.00633\times0.20167>0.00001\times(21.21K_p+1)$$

据此可知，当 $K_p<5.97$ 时，系统稳定。

另外，考虑到 T_s 很小，可忽略不计，式(3-67)可近似写为

$$G(s)H(s)\approx\frac{K_pK_sK_{sf}/C_e}{T_aT_ms^2+T_ms+1} \tag{3-70}$$

闭环传递函数可近似写为

$$\Phi(s)\approx\frac{K_pK_s/C_e}{(T_aT_ms^2+T_ms+1)+K_pK_sK_{sf}/C_e} \tag{3-71}$$

将参数代入闭环传递函数表达式可得

$$\begin{aligned}\Phi(s)&\approx\frac{303.03K_p}{0.006s^2+0.2s+21.21K_p+1}\\&=\frac{50505K_p}{s^2+33.33s+3535K_p+166.67}\end{aligned}$$

这是一个二阶系统。其超调量只与 ξ 有关，该系统的性能指标计算可以采用典型二阶系统的计算方法。对照二阶系统闭环传递函数标准式，有

$$\begin{cases}\omega_n{}^2=3535K_p+166.67\\2\omega_n\xi=33.33\end{cases}$$

考虑到系统被设计成最佳二阶系统，即 $\xi=0.707$，由以上两式可求得

$$\omega_n = \frac{33.33}{2 \times 0.707} = 23.57，K_p = 0.11$$

调节时间
$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.18\text{s}$$

2）稳态性能分析

系统的动态结构图可简化为如图 3.35 所示。

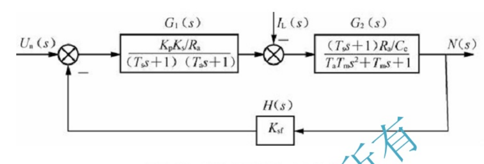


图 3.35　简化后系统的动态结构图

给定信号作用时，设 $I_L(s)=0$。由图 3.35 可见，该系统是 0 型系统，因而当 $U_n(s)=\frac{1}{s}$ 时，系统一定存在稳态误差，其大小可以表示为

$$e_{ssr} = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+K_pK_sK_{sf}/C_e}$$

将各参数值代入，得

$$e_{ssr} = \frac{1}{1+40 \times 0.07K_p/0.132}$$

取 $K_p=0.11$，则 $e_{ssr}=0.3$。

在扰动信号 $I_L(s)$ 作用时，设输入信号 $U_n(s)=0$，$I_L(s)=\frac{1}{s}$，根据扰动下的误差传递函数可以求得稳态误差为

$$e_{ssd} = \lim_{s\to 0} s \cdot E_d(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G_2(s)H(s)I_L(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{R_aK_{sf}}{C_e+K_pK_sK_{sf}} \tag{3-72}$$

将各参数代入式（3-72），其中取 $K_p=0.11$ 得

$$e_{ssd} = \frac{0.5 \times 0.07}{0.132+0.11 \times 40 \times 0.07} \approx 0.08$$

系统总的稳态误差 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssd}=0.38$。

从以上分析来看，在一定条件下，系统是稳定的，调节时间也基本符合工程要求。

2. 单闭环无静差调速系统

为了提高系统的稳态精度，同时满足平稳性的要求，改善动态指标，将系统中的比例控制器改换成比例积分控制器，即

$$\frac{U_{ct}(s)}{E(s)} = \frac{K_p(\tau_1 s+1)}{\tau_1 s} \tag{3-73}$$

系统的结构图如图 3.36 所示，对应的动态结构图如图 3.37 所示。

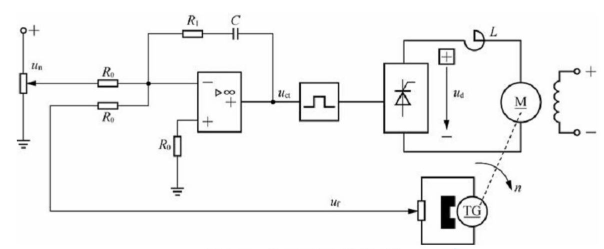


图 3.36　单闭环无静差调速系统

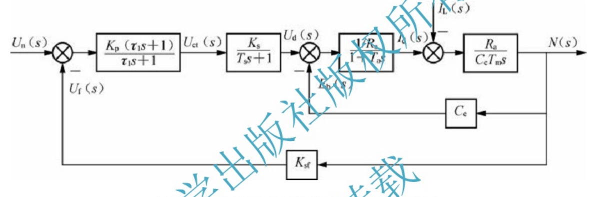


图 3.37　单闭环无静差调速系统的动态结构图

根据动态结构图求得系统的前向通路传递函数为

$$G(s)=\frac{K_pK_s(\tau_1 s+1)/(C_e\tau_1)}{s(T_aT_ms^2+T_ms+1)(T_ss+1)} \tag{3-74}$$

若 $T_m>4T_a$，则可对分母作因式分解得

$$G(s)=\frac{K_pK_s(\tau_1 s+1)/(C_e\tau_1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_ss+1)}\quad (T_1>T_2) \tag{3-75}$$

取 $\tau_1=T_1$，可得

$$G(s)=\frac{K_pK_s/(C_e\tau_1)}{s(T_2s+1)(T_ss+1)} \tag{3-76}$$

1）动态性能分析

将系统参数代入式(3-74)，可得

$$G(s)=\frac{303.03K_p(\tau_1 s+1)/\tau_1}{s(0.006s^2+0.2s+1)(0.00167s+1)}$$

对分母中的二次因式作因式分解，有

$$G(s)=\frac{303.03K_p(\tau_1 s+1)/\tau_1}{s(0.162s+1)(0.0368s+1)(0.00167s+1)}$$

取 $\tau_1=0.162$，有

$$G(s)=\frac{1870.56K_p}{s(0.0368s+1)(0.00167s+1)}$$

反馈通路传递函数为

$$H(s)=K_{sf}=0.07$$

故闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{N(s)}{U_n(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{1870.56K_p}{s(0.0368s+1)(0.00167s+1)+130.94K_p}$$

特征方程为

$$s(0.0368s+1)(0.00167s+1)+130.94K_p=0$$

根据劳斯稳定判据，可得

$$K_p<4.78$$

另外，考虑到 $T_s=0.00167\text{s}$，相对其他时间常数很小，可忽略。因而系统的闭环传递函数可近似为

$$\Phi(s)\approx\frac{50830.43K_p}{s^2+27.17s+3558.15K_p}$$

对照二阶系统标准形式，有

$$\begin{cases}\omega_n^2=3558.15K_p\\2\omega_n\xi=27.17\end{cases}$$

若要求系统的 $\xi=0.707$，则可解得 $\omega_n=19.21$，$K_p=0.1$。调节时间 $t_s=\dfrac{3}{\xi\omega_n}=0.22\text{s}$。

2）稳态性能分析

对于Ⅰ型系统，在给定信号 $U_n(s)=\dfrac{1}{s}$作用下的稳态误差 $e_{ssr}=0$。将图 3.35 中的 K_p 换成$\dfrac{K_p(\tau_1s+1)}{\tau_1s}$，求得无静差系统在扰动信号作用下的稳态误差为

$$e_{ssd}=\lim_{s\to0}s\cdot E_d(s)=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{G_2(s)H(s)I_L(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{\dfrac{(T_as+1)R_aK_{sf}/C_e}{T_aT_ms^2+T_ms+1}}{1+\dfrac{K_pK_s(\tau_1s+1)}{R_a\tau_1s(T_ss+1)(T_as+1)}\cdot\dfrac{R_a(T_as+1)}{C_e(T_aT_ms^2+T_ms+1)}\cdot K_{sf}}\cdot\frac{1}{s}=0$$

系统总的稳态误差 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssd}=0$。

由上述分析可见，与采用比例调节器的系统相比较，采用比例积分调节器后，系统的无差度得到了提高，稳态精度得到改善。若适当选择系统参数，则可基本保持或改善动态性能。

3.8　MATLAB 用于时域分析

在系统的时域分析中，可利用 MATLAB 完成系统的输出响应分析、稳定性分析以及

稳态误差分析等工作。

1. 系统输出响应及性能分析

在 MATLAB 中，可以通过单输入—单输出系统的传递函数，进行系统的脉冲响应、阶跃响应、一般输入响应等时域分析。如果给定系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$，则其时域响应可以由以下函数得到。

单位阶跃响应：step(num，den)或 y = step(num，den，t)。

单位脉冲响应：impulse(num，den)或 y = impulse(num，den，t)。

一般输入响应：y = lsim(num，den，u，t)。

注意，时间 t 是事先定义的矢量；u 为输入信号。

此外，还可以求出系统的超调量、稳态误差以及调节时间。

1）一阶系统响应

【例 3 -10】 系统结构如图 3. 10 所示，试用 MATLAB 做出系统单位阶跃响应曲线。

解： MATLAB 程序如下

```
sys1=tf([100],[1 0]);
sys2=tf([0.1],[1]);
sys=feedback(sys1,sys2);
step(sys)
```

运行结果如图 3. 38 所示。

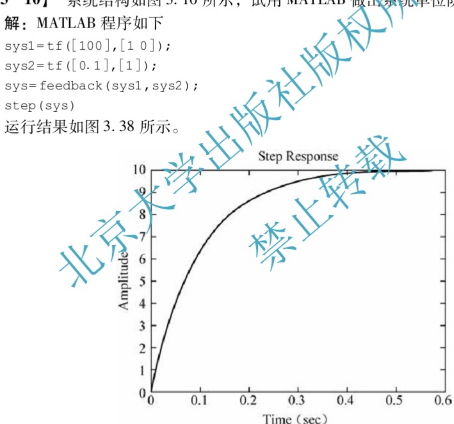


图 3. 38 单位阶跃响应曲线

2）二阶系统响应

【例 3 -11】 二阶系统闭环传递函数的标准形式为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

若 ω_n 确定，系统的瞬态响应和 ξ 的取值有关。试用 MATLAB 分析在不同的 ξ 值时，

系统的单位阶跃响应。

解：键入如下程序

```
t=0:0.1:12;num=[1];
zeta1=0;den1=[1 2*zeta1 1];
zeta3=0.3;den3=[1 2*zeta3 1];
zeta5=0.5;den5=[1 2*zeta5 1];
zeta7=0.7;den7=[1 2*zeta7 1];
zeta9=1.0;den9=[1 2*zeta9 1];
[y1,x,t]=step(num,den1,t);
[y3,x,t]=step(num,den3,t);
[y5,x,t]=step(num,den5,t);
[y7,x,t]=step(num,den7,t);
[y9,x,t]=step(num,den9,t);
plot(t,y1,t,y3,t,y5,t,y7,t,y9);
grid on;
```

运行结果如图 3.39 所示。

3）稳定性分析

既可以通过对系统输出响应曲线的分析来判别系统的稳定性，也可以通过对系统闭环特征方程的求解来进行稳定性判别。

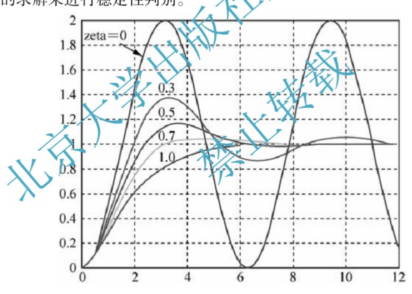


图 3.39　二阶系统的单位阶跃响应曲线

【例 3-12】　系统的闭环特征方程为 $q(s)=s^3+s^2+2s+4=0$，试用 MATLAB 判断系统稳定性。

解：键入

```
den=[1 1 2 4];
roots(den)
```

运行结果：

```
ans=
0.2390+1.6277i
0.2390-1.6277i
```

```
-1.4780
```

可见，系统有两个位于 S 右半平面的共轭复根，故系统不稳定。

4）求动态性能指标

【例 3-13】 已知 $\Phi(s)=\dfrac{5K_a}{s^2+34.5s+5K_a}$，试计算 $K_a=200$ 时系统的 t_p、t_s、$\sigma\%$。

解： MATLAB 程序如下

```
t=0:0.01:2;
num=[1000];
den=[1 34.5 1000];
[y,x,t]=step(num,den,t);
plot(t,y);   % 求超调量
maxy=max(y);
ys=y(length(t));
pos=100* (maxy-ys)/ys;
n=1;
while y(n)<maxy
n=n+1;end
tp=t(n)   % 求峰值时间
L=length(t);
while(y(L)>0.98*ys)&(y(L)<1.02*ys)
L=L-1;end
ts=t(L)   % 求调节时间
```

计算结果：

$t_p=0.12, t_s=0.18, \sigma\%=12.93\%$

【例 3-14】 对于0型、Ⅰ型、Ⅱ型单位反馈系统，求出给定信号分别为单位脉冲、单位阶跃和单位斜坡时的系统响应及稳态响应。

解： 设0型系统的开环传递函数为 $G_1(s)=\dfrac{1}{s+1}$，Ⅰ型系统的开环传递函数为 $G_2(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，Ⅱ型系统的开环传递函数为 $G_3(s)=\dfrac{4s+1}{s^2(s+1)}$。

(1) 求单位脉冲响应及稳态误差。

MATLAB 程序如下：

```
t=0:0.1:15;
[num1,den1]=cloop([1],[1 1]);
[num2,den2]=cloop([1],[1 1 0]);
[num3,den3]=cloop([4 1],[1 1 0 0]);
y1=impulse(num1,den1,t);
y2=impulse(num2,den2,t);
y3=impulse(num3,den3,t);
subplot(311);plot(t,y1);
subplot(312);plot(t,y2);
subplot(313);plot(t,y3);
er1=0-y1(length(t));
```

```
er2=0-y2(length(t));
er3=0-y3(length(t));
```

运行结果如图 3.40 所示。

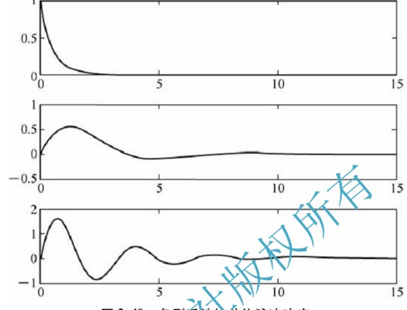


图 3.40 各型系统的单位脉冲响应

同时在命令窗口中得到：

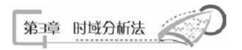
```
er1 = -9.3576e-014          % 0 型系统稳态误差
er2 = -2.6275e-004          % Ⅰ型系统稳态误差
er2 = -0.0040               % Ⅱ型系统稳态误差
```

（2）求单位阶跃响应及稳态误差。

MATLAB 程序如下：

```
t=0:0.1:20;
[num1,den1]=cloop([1],[1 1]);
[num2,den2]=cloop([1],[1 1 0]);
[num3,den3]=cloop([4 1],[1 1 0 0]);
y1=step(num1,den1,t);
y2=step(num2,den2,t);
y3=step(num3,den3,t);
subplot(311);plot(t,y1);
subplot(312);plot(t,y2);
subplot(313);plot(t,y3);
er1=1-y1(length(t));
er2=1-y2(length(t));
er3=1-y3(length(t));
```

运行结果如图 3.41 所示。



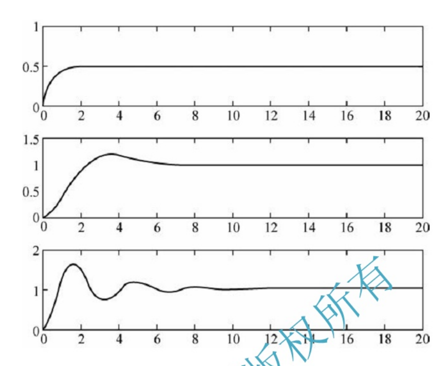


图 3.41 各型系统的单位阶跃响应

同时在命令窗口中得到：

```
er1 =0.5000                  % 0 型系统稳态误差
er2 = -2.4294e-005           % Ⅰ型系统稳态误差
er2 =3.3525e-004             % Ⅱ型系统稳态误差
```

(3) 求单位斜坡响应及稳态误差。

MATLAB 程序如下：

```
t =0:0.1:20;
t1 =0:0.1:100;
[num1,den1] =cloop([1],[1 1]);
[num2,den2] =cloop([1],[1 1 0]);
[num3,den3] =cloop([4 1],[1 1 0 0]);
y1 =step(num1,[den1 0],t1);
y2 =step(num2,[den2 0],t);
y3 =step(num3,[den3 0],t);
subplot(311);plot(t1,y1,t1,t1);
subplot(312);plot(t,y2,t,t);
subplot(313);plot(t,y3,t,t);
er1 =t1(length(t1))-y1(length(t1));
er2 =t(length(t))-y2(length(t));
er3 =t(length(t))-y3(length(t));
```

运行结果如图 3.42 所示。

同时在命令窗口中得到：

```
er1 =50.2500           % 0 型系统稳态误差
er2 =1.0000            % Ⅰ型系统稳态误差
er2 = -0.0011          % Ⅱ型系统稳态误差
```

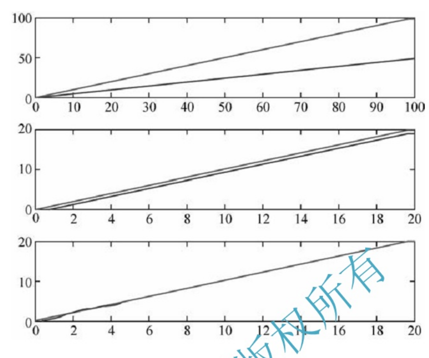


图 3.42　各型系统的单位斜坡响应

结果分析，据前述误差分析，在单位斜坡响应下，0 型系统的稳态误差 $e_{ss}=\infty$。但程序中无法将时间量取∞，而只能取所考虑时间段内的最后一个时间点，故求得的稳态误差为对应该时间点的误差值 50.25。

【例 3-15】　某单闭环有差系统，如图 3.36 所示。当 K_p 取值分别为 0.11 和 6 时，求系统的单位阶跃响应。

解：由前面的分析可知，系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{303.03K_p}{0.00001s^3+0.00633s^2+0.20167s+21.21K_p+1}$$

MATLAB 程序如下：

```
kp=[0.11 6];
t=[0:0.01:1];
num1=303.03*kp(1);
den1=[0.00001 0.00633 0.20167 21.21*kp(1)+1];
y1=step(num1,den1,t);
num2=303.03*kp(2);
den2=[0.00001 0.00633 0.20167 21.21*kp(2)+1];
y2=step(num2,den2,t);
subplot(211);plot(t,y1);
subplot(212);plot(t,y2);
gtext('kp=0.11');
gtext('kp=6');
```

运行结果如图 3.43 所示。

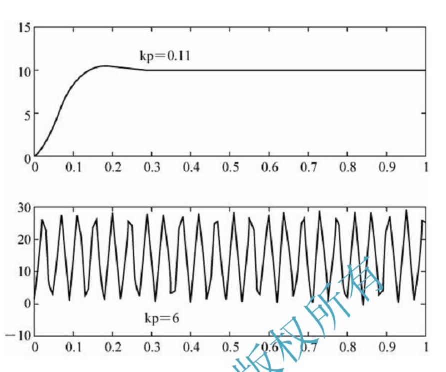


图 3.43 系统的单位阶跃响应

结果分析，当 K_p =0.11，即取较小值时，系统输出呈衰减振荡，超调量较小，即振荡幅值较小；当 K_p =6，即取较大值时，系统输出呈等幅振荡。由此说明 K_p 值越大，系统振荡的倾向越强烈。

2. SIMULINK 用于系统仿真

SIMULINK 是 MATLAB 的一个附加组件，用来提供一个系统级的建模、动态仿真及综合分析的工作平台。SIMULINK 模型可以用来模拟线性或非线性、连续或离散，或者两者的混合系统，即可用它来模拟几乎所有的动态系统。和 MATLAB 的主要区别在于，它与用户的交互接口是基于 Windows 的图形(使用方框图)编程方法。

进入 MATLAB 环境后，有两种方法可以启动 SIMULINK：

(1) 在 MATLAB 的工具条中键入“SIMULINK”，并按 Enter 键即可启动 SIMULINK 软件。

(2) 在 MATLAB 的工具条中单击 SIMULINK 的按钮 。

接下来，可在 SIMULINK 的图形编辑器中直接构建系统动态结构图并仿真。

下面通过一个实例，简单介绍 SIMULINK 的使用。

【例 3-16】 用 SIMULINK 对 3.7 节中的单闭环无静差调速系统进行仿真。

解： 在 SIMULINK 下建立系统仿真结构图如图 3.44 所示。

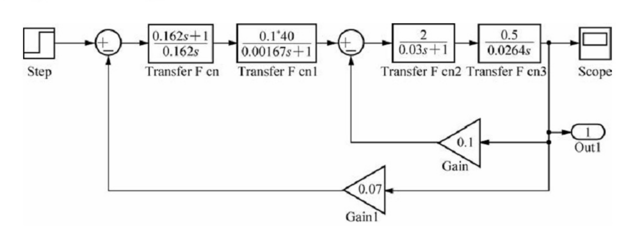
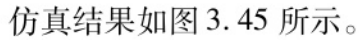


图 3.44　系统的仿真结构图


仿真结果如图 3.45 所示。

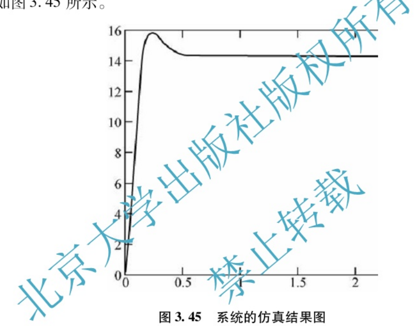


图 3.45　系统的仿真结果图

小　结

一般自动控制系统应具有足够的稳定度、较高的稳态控制精度和较快的响应过程。为了评价这三方面的性能，必须定义几个反映稳、快、准三方面性能的指标。这些性能指标是在典型输入之下给出的。

时域分析法重点分析的是一阶和二阶系统。如果一个高阶系统的特性近似于一阶或二阶系统，则可在一定的条件下，将其降阶为一阶或二阶系统，然后按一阶或二阶系统进行分析。而对于一般的高阶系统，可用劳斯稳定判据来判定系统稳定性，用终值定理来计算稳态误差。但不能用本章介绍的方法求其 $\sigma\%$ 和 t_s。

系统平稳性、快速性和稳态精度对系统参数的要求是矛盾的，在系统参数的选择无法同时满足几方面的性能要求时，可采用在前向通路中加比例微分环节以及增加输出量的微分负反馈等措施来改善系统动态性能，使系统能同时满足几方面的要求。

系统能正常工作的首要条件是，系统稳定。可采用劳斯稳定判据来判断系统的稳定性。若系统属结构不稳定，则可通过用比例反馈来包围有积分作用的环节，从而改变环节的积分性质，或者前向通路中增加比例微分环节等方法，使系统变为结构稳定系统。

稳态误差是衡量系统控制精度的性能指标。稳态误差可分为，由给定信号引起的误差以及由扰动信号引起的误差两种。稳态误差也可用静态误差系数来表述。系统的稳态误差主要是由积分环节的个数和开环增益来确定的。为了提高精度等级，可增加积分环节的数目；为了减小有限误差，可增大开环增益。但这两种方法都会使系统的稳定性变差，甚至导致系统不稳定。提高系统控制精度的另一种措施是，在反馈系统中增加一个前馈补偿装置，用这种方法既不影响系统的稳定性，又可减小系统的稳态误差。

习　　题

1. 设温度计需要在1min内指示出响应值的98%，并且假设温度计为一阶系统，求时间常数 T。如果将温度计放在澡盆内，澡盆的温度以10℃/min的速度线性变化，求温度计的误差。

2. 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{4}{s+5}$，求系统的单位阶跃响应。

3. 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，求系统的上升时间 t_r、峰值时间 t_p、超调量 $\sigma\%$和调整时间 t_s。

4. 已知系统的单位阶跃响应为 $c(t)=1+0.2e^{-60t}-1.2e^{-10t}$，试求：

（1）系统的闭环传递函数；

（2）系统的阻尼比 ξ 和无阻尼自然振荡频率 ω_n。

5. 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，当 $r(t)=\varepsilon(t)$ 时，系统的动态性能指标 $\sigma\%=30\%$，$t_s\leqslant 0.3s(\Delta=5\%)$，求系统 K、T 值以满足动态指标。

6. 闭环系统的特征方程如下，试用劳斯稳定判据判断系统的稳定性。

（1）$s^3+20s^2+9s+100=0$；

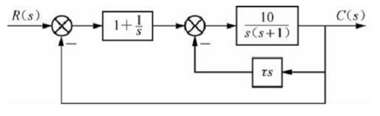
（2）$s^4+8s^3+18s^2+16s+5=0$。

7. 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+4)(s+10)}$。

（1）试确定系统稳定时的 K 值范围；

（2）确定使闭环极点的实部不大于 -1 的 K 值范围。

8. 已知系统的结构如题图3.1所示，试问 τ 取值多少，系统才能稳定？



题图 3.1

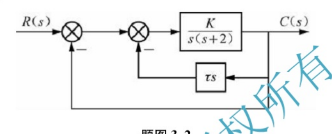


9. 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下。试求各系统的静态位置误差系数 K_p、速度误差系数 K_v 和加速度误差系数 K_a，并确定当输入信号为 $r(t)=\varepsilon(t)$、$2t$、t^2 和 $1+2t+t^2$ 时系统的稳态误差 e_{ss}。

(1) $G(s)=\dfrac{20}{(0.1s+1)(0.2s+1)}$；　　(2) $G(s)=\dfrac{200}{s(s+2)(s+10)}$；

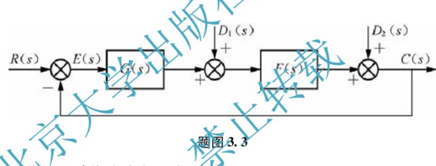
(3) $G(s)=\dfrac{10(2s+1)}{s^2(s^2+4s+10)}$；　　(4) $G(s)=\dfrac{K}{s(s^2+4s+200)}$。

10. 已知系统的结构图如题图 3.2 所示，若使系统满足阻尼比 $\xi=0.7$ 和单位斜坡函数输入时稳态误差 $e_{ss}=0.25$，试确定参数 K 和 τ 的取值。



题图 3.2

11. 已知系统结构图如题图 3.3 所示，其中 $r(t)=\varepsilon(t)$，$d_1(t)=\varepsilon(t)$，$d_2(t)=\varepsilon(t)$。试求：



题图 3.3

(1) 在 $r(t)$ 作用下系统的稳态误差；

(2) 在 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 同时作用下系统的稳态误差；

(3) 在 $d_1(t)$ 作用下，且 $G(s)=K_p+\dfrac{K}{s}$ 和 $F(s)=\dfrac{1}{Js}$ 时，系统的稳态误差。

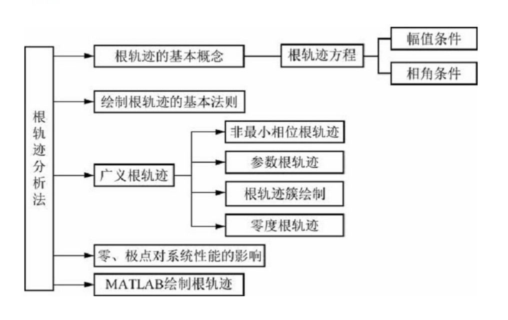
第4章 根轨迹分析法

教学目的与要求

1. 理解根轨迹定义及根轨迹方程的含义。
2. 掌握根轨迹幅值条件与相角条件的使用方法。
3. 熟练掌握概略根轨迹的绘制方法。
4. 理解参数根轨迹、非最小相位根轨迹、根轨迹簇、0°根轨迹的定义并掌握其绘制方法。
5. 了解开环零、极点对系统性能的影响。
6. 掌握使用根轨迹分析控制系统的方法。
7. 了解MATLAB绘制根轨迹的方法。



知识结构





根轨迹法所要解决的问题，仍然是控制系统的性能分析和计算。在第3章介绍的时域分析法中已经看到，控制系统的性能取决于系统的闭环传递函数。因此，可以根据系统闭环传递函数的零、极点研究控制系统性能。但对于高阶系统，采用解析法求解系统的闭环特征根(闭环极点)通常是比较困难的，且当系统某一参数(如开环增益 K 或开环根轨迹增益 K^*)发生变化时，又需要重新计算，这就给系统分析带来很大的不便。

1948年，W. R. 埃文斯(W. R. Evans)根据反馈系统中开、闭环传递函数间的内在联系，提出了求解闭环特征根比较简易的图解方法，这种方法称为根轨迹法。即当系统某一参数(如开环增益 K 或开环根轨迹增益 K^*)发生变化时，用开环传递函数的零、极点推导出闭环传递函数的零、极点分布轨迹，进而分析闭环系统的稳态性能、动态性能以及参数变化对系统性能的影响。利用根轨迹还可以根据对系统瞬态特性的要求，来调整参数或确定开环零、极点位置。根轨迹法直观形象，所以在控制工程中获得了广泛应用。

本章主要介绍根轨迹的概念、绘制根轨迹的法则、广义根轨迹的绘制方法以及应用根轨迹分析控制系统性能等方面的内容。

4.1 根轨迹

4.1.1 根轨迹的基本概念

根轨迹是当开环系统某一参数(如根轨迹增益 K^*)从零变化到无穷大时，闭环特征方程的根在 S 平面上移动的轨迹。根轨迹增益 K^* 是首1型开环传递函数对应的系数。

在介绍图解法之前，先用直接求根的方法来说明根轨迹的含义。假设某控制系统如图4.1所示。

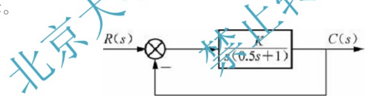


图4.1 控制系统框图

其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*}{s(s+2)}$$

其中 K 为开环增益，$K^*=2K$ 为根轨迹增益，两者都是变化量。系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(S)}{1+G(S)}=\frac{K^*}{s^2+2s+K^*}$$

闭环特征方程为 $s^2+2s+K^*=0$，特征根为 $s_1=-1+\sqrt{1-K^*}$，$s_2=-1-\sqrt{1-K^*}$

可以看出，系统参数 K^* 从零变化到无穷大时，闭环极点的值也是不断变化的。当 $K^*=0$ 时，系统的两个闭环极点分别为 $s_1=0$ 与 $s_2=-2$。当 $0<K^*<1$ 时，极点 $s_{1,2}$ 均为负实数，分布在负实轴上。当 $K^*=1$ 时，$s_{1,2}=-1$。当 $K^*>1$ 时，两个极点 $s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{1-K^*}$ 变成一对共轭复极点，随着 K^* 的增大，两个极点的实部保持不变，沿平行于虚轴的直线从正负两个方

向趋于无穷远。具体计算数值如表 4 - 1 所示。

表 4 - 1　当 K^* 从 0 变化到∞ 时系统的特征根

K^*	K	s_1	s_2
0	0	0	2
0.5	0.25	−0.3	−1.7
1	0.5	−1	−1
2	1	−1 + j	−1 − j
5	2.5	−1 + j2	−1 − j2
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	∞	−1 + j∞	−1 − j∞

利用计算结果在 S 平面上描点，并用平滑曲线将其连接，便得到 K^* 从零变化到无穷大时闭环极点在 S 平面上移动的轨迹，即根轨迹，如图 4.2 所示。图中箭头表示 K^* 增大时两条根轨迹移动的方向。

依据根轨迹图，就能分析当参数（如 K^*）变化时，对应根的变化过程和趋势，进而分析系统的稳定性、动态性能以及参数变化对系统性能的影响。

1）稳定性

开环增益从零变化到无穷大时，图 4.2 所示的根轨迹全部落在 S 左半平面，因此当 $K^*>0$（或 $K=0.5K^*>0$）时，系统是稳定的；假若因为 K^* 的变化，使得系统根轨迹越过虚轴进入 S 右半平面，则在相应 K^*（或 K）值下系统是不稳定的；系统在根轨迹与虚轴交点处为临界稳定，对应的 K^*（或 K）值就是临界根轨迹增益（或开环增益）。

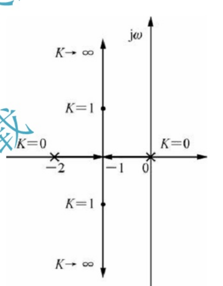


图 4.2　系统根轨迹

2）动态性能

由图 4.2 可见，当 $0<K^*<1$（或 $0<K<0.5$）时，闭环特征根为负实根，系统呈现过阻尼状态，阶跃响应为单调上升过程。

当 $K^*=1$（或 $K=0.5$）时，闭环特征根为二重实根，系统呈现临界阻尼状态，阶跃响应仍为单调上升过程，但响应速度较 $0<K^*<1$ 时快。

当 $K^*>1$（或 $K>0.5$）时，闭环特征根为一对共轭复根，系统呈现欠阻尼状态，阶跃响应为振荡衰减过程，且随 K^* 增加，阻尼比减小，超调量增大。

上述分析表明，根轨迹与系统性能之间有着密切的联系，利用根轨迹可以分析当系统参数（K^* 或 K）变化时系统动态性能的变化趋势。

需要指出，上述所示的根轨迹及分析是通过直接求解系统的特征方程，然后根据参数 K^*（或 K）取不同值解得的特征根而描点绘制的。此方法虽然简单，但是对于高阶系统是不适宜的，而我们希望有简便的图解方法，可以根据已知的开环零、极点迅速地绘制出闭环系统的根轨迹，即埃文斯法根轨迹。在学习埃文斯法根轨迹之前，必须先理解绘

制根轨迹的基础——根轨迹方程。

4.1.2　根轨迹方程

控制系统的一般结构如图 4.3 所示，相应开环传递函数为 $G(s)H(s)$。

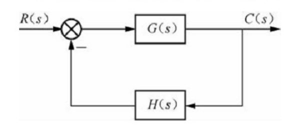


图 4.3　控制系统一般结构框图

假设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \tag{4-1}$$

式中 K^* 为系统根轨迹增益，m 为开环零点个数，n 为开环极点个数。系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{4-2}$$

系统的闭环特征方程为 $1+G(s)H(s)=0$，将式(4-1)代入为

$$G(s)H(s)=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1 \tag{4-3}$$

显然，在 S 平面上凡是满足式(4-3)的点，都是根轨迹上的点，式(4-3)称为根轨迹方程。可以用幅值条件和相角条件来表示。

幅值条件为

$$|G(s)H(s)|=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1 \tag{4-4}$$

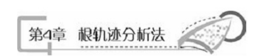
相角条件为

$$\begin{aligned}\angle G(s)H(s)&=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=\sum_{i=1}^{m}\angle\phi_i-\sum_{i=1}^{n}\angle\theta_j\\&=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)\end{aligned} \tag{4-5}$$

式(4-4)中，$\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|$ 表示所有开环零点到根轨迹上某一点的向量模之积，$\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|$ 表示所有开环极点到根轨迹上某一点的向量模之积。式(4-5)中，$\sum_{i=1}^{m}\angle\phi_i$ 表示所有开环零点到根轨迹上某一点的向量相角之和，$\sum_{j=1}^{n}\angle\theta_j$ 表示所有开环极点到根轨迹上某一点的向量相角之和。

从式(4-4)和式(4-5)可以看出，幅值条件与根轨迹增益 K^* 有关，而相角条件却与 K^* 无关。在使用相角条件和幅值条件时需要注意的是：

(1) S 平面上的某个点，只要满足相角条件，则该点必在根轨迹上；若 S 平面上的某



个点在根轨迹上，则必满足相角条件。因此，相角条件是确定 S 平面上一点是否在根轨迹上的充分必要条件。

（2）根轨迹上某点所对应的 K^* 值，可由幅值条件得出。

（3）若开环无零点，则 $\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|=1$ 且 $\sum_{i=1}^{m}\angle\phi_i=0$。

（4）若开环无极点，则 $\prod_{i=1}^{m}|(s-p_j)|=1$ 且 $\sum_{j=1}^{n}\angle\theta_j=0$。

【例 4-1】 判断 $s_1=-3$ 与 $s_1=-1+\mathrm{j}$ 是否在图 4.1 所示系统的根轨迹上。

解：（1）如图 4.4 所示，极点 $p_1=0$、$p_2=-2$ 到 $s_1=-3$ 的角度分别为 $\theta_1=180°$、$\theta_2=180°$，即 $\sum_{j=1}^{2}\angle\theta_j=360°$，不满足相角条件，不是系统根轨迹上的点。

（2）如图4.5 所示，根据三角形法则系统极点到 $s_1=-1+\mathrm{j}$ 的角度和为 $\sum_{j=1}^{2}\angle\theta_j=180°$，满足相角条件，是系统根轨迹上的点。$s_1=-1+\mathrm{j}$ 所对应的 K^* 可以用幅值条件求出。

$$K^*=\frac{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}{1}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{1}=2$$

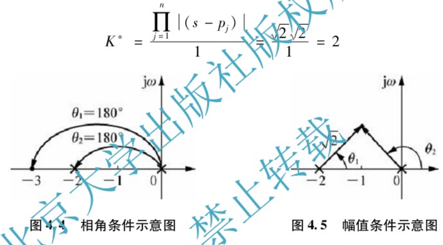


图 4.4 相角条件示意图　　　　图 4.5 幅值条件示意图

从上例可以看出，应用相角条件可以重复上述过程找到 S 平面上所有的闭环极点。但这种方法并不实用。实际绘制根轨迹是应用根轨迹法则进行的，而此法则是以根轨迹方程为基础的。

【思考题】 相角条件与幅值条件的使用有什么不同？

4.2 根轨迹的绘制

从 4.1 节的分析可以知道，无论使用解特征根的方法，还是使用相角条件都可以绘制闭环系统的根轨迹，但实际操作计算量较大。本节将讨论根轨迹增益 K^*（或开环增益 K）变化时绘制根轨迹的实用法则。熟练地掌握这些法则，可以方便、快速地绘制系统的根轨迹，这对于分析和设计系统是非常有益的。

4.2.1 绘制根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点 根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环零点个数 m 少于开环极点个数 n，则有 $n-m$ 条根轨迹终止于无穷远处。

根轨迹的起点、终点分别是指根轨迹增益 $K^*=0$ 时和 $K^*=\infty$ 时的根轨迹点。将幅值条件式(4-4)改写为

$$K^* = \frac{\prod_{j=1}^{n} |(s-p_j)|}{\prod_{i=1}^{m} |(s-z_i)|} = \frac{s^{n-m}\prod_{j=1}^{n} \left|\left(1-\frac{p_j}{s}\right)\right|}{\prod_{i=1}^{m} \left|\left(1-\frac{z_i}{s}\right)\right|} \tag{4-6}$$

若使 $K^*=0$，则只有 $s=p_j$，即根轨迹起于开环极点；若使 $K^*=\infty$ 时，则只有 $s=z_i$，即根轨迹终于开环零点；若 $n>m$，当 $|s|\to\infty$ 时，$K^*\to\infty$，即终止于无穷远处。

法则 2　根轨迹的分支数、对称性和连续性　根轨迹的分支数与开环零点数 m、开环极点数 n 中的大者相等，且根轨迹连续并对称于实轴。

根轨迹是开环系统某一参数从零变化到无穷大时，闭环极点在 S 平面上的变化轨迹。因此，根轨迹的分支数必与闭环特征方程根的数目一致，即根轨迹分支数等于系统的阶数。一般地，实际系统都存在惯性，反映在传递函数上必有 $n>m$。即根轨迹分支数就等于开环极点数。

实际系统的特征方程都是实系数方程，依代数定理其特征根必为实数或共轭复数。因此根轨迹必然对称于实轴。由对称性，只需画出 S 平面上半部和实轴上的根轨迹，下半部的根轨迹即可对称画出。

K^* 是特征方程的某个系数，当 K^* 从零连续变化到无穷大时，特征方程的系数是连续变化的，因而特征根的变化也必然是连续的，也就是说根轨迹具有连续性。

法则 3　实轴上的根轨迹　S 平面上实轴的某一区域，若其右端开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹或根轨迹的一部分。

设系统开环零、极点分布如图 4.6 所示。图中，s_0 是实轴上的点，$\phi_i(i=1, 2, 3, \cdots)$ 是各开环零点到 s_0 向量的相角，$\theta_j(j=1, 2, 3, \cdots)$ 是各开环极点到 s_0 点向量的相角。由图 4.6 可见，复数共轭极点到实轴上任意一点(包括 s_0 点)的向量之相角和为 2π。对复数共轭零点，情况同样如此。因此，在确定实轴上的根轨迹时，可以不考虑开环复数零、极点的影响。图 4.6 中，s_0 点左端的开环实数零、极点到 s_0 点的向量之相角均为零，而 s_0 点右端开环实数零、极点到 s_0 点的向量之相角均为 π，故只有落在 s_0 点右端实轴上的开环实数零、极点，才有可能对 s_0 点的相角条件造成影响，且这些开环零、极点提供的相角均为 π。如果令 $\sum\angle\phi_i$ 代表 s_0 点右侧所有开环实数零点到 s_0 点的向量相角之和，$\sum\angle\theta_j$ 代表 s_0 点右侧所有开环实数极点到 s_0 点的向量相角之和，那么 s_0 点位于根轨迹上的充分必要条件是下列相角条件成立：

$$\sum_{i=1}^{m_0}\angle\phi_i - \sum_{i=1}^{n_0}\angle\theta_j = (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm1, \cdots) \tag{4-7}$$

由于 π 与 $-\pi$ 同方向，于是等效有

$$\sum_{i=1}^{m_0}\angle\phi_i + \sum_{i=1}^{n_0}\angle\theta_j = (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm1, \cdots) \tag{4-8}$$

式中 m_0、n_0 分别表示在 s_0 点右端实轴上的开环零点和极点个数。显然，若 m_0+n_0 为奇数，则满足相角条件，于是本法则得证。

不难判断，在图 4.6 所示实轴上，区段 $[p_1, z_1]$、$[p_4, z_2]$ 以及 $(-\infty, z_3]$ 均为实轴上的根轨迹。

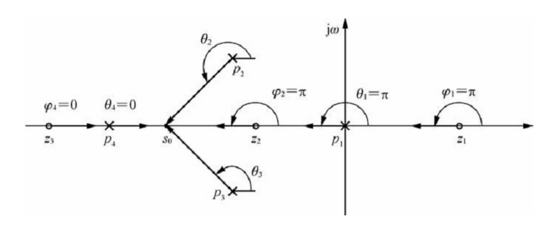


图 4.6 实轴上的根轨迹

法则 4 根轨迹的渐近线 当 $n>m$ 时，有 $n-m$ 条根轨迹分支沿着与实轴夹角为 ϕ_a、交点为 σ_a 的一组渐近线趋向于无穷远处，且有

$$\begin{cases}\phi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \\ \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j - \sum\limits_{i=1}^{m} z_i}{n-m}\end{cases} \quad (k=0,1,\cdots,n-m-1) \tag{4-9}$$

证明：

(1) 渐近线的倾角 ϕ_a：假设在无穷远处有闭环极点 s^*，则 S 平面上所有从开环零点 z_i 和极点 p_j 指向 s^* 的向量相角都相等，即 $\angle(s^*-z_i)=\angle(s^*-p_j)=\phi_a$，代入相角条件式(4-5)，得

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s^*-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s^*-p_j)=m\phi_a-n\phi_a=(2k+1)\pi$$

所以渐近线与实轴夹角为

$$\phi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k=0,1,\cdots,n-m-1)$$

(2) 渐近线与实轴的交点 σ_a：假定在无穷远处有闭环极点 s^*，则 S 平面上所有开环零点 z_i 和极点 p_j 指向 s^* 的向量长度都相等。可以认为，对于无穷远处的闭环极点 s^* 而言，所有开环零、极点都汇集在一起，其位置即 σ_a。即当 $K^*\to\infty$ 和 $s^*\to\infty$ 时，$z_i=p_j=\sigma_a$。由式(4-3)可得

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod\limits_{i=1}^{m}(s-z_i)}=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-\sigma_a)}{\prod\limits_{i=1}^{m}(s-\sigma_a)}=(s-\sigma_a)^{n-m} \tag{4-10}$$

式(4-10)右端展开式为

$$(s-\sigma_a)^{n-m}=s^{n-m}-\sigma_a(n-m)s^{n-m-1}+\cdots$$

而式(4-10)左端用长除法处理为

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)} = s^{n-m} - (\prod_{j=1}^{n}p_j - \prod_{i=1}^{m}z_i)s^{n-m-1} + \cdots$$

当 $s\to\infty$ 时，只保留前两项，并比较第二项系数可得

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^{n}p_j - \sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$$

【例 4-2】 单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

试绘制根轨迹的渐近线。

解： 系统有一个开环零点为 $z=-1$，有四个开环极点分别为 $p_1=0$、$p_2=-4$、$p_{3,4}=-1\pm j$，分别标于 S 平面上，如图 4.7 所示。根据法则，系统有 4 条根轨迹分支，有 $n-m=3$ 条根轨迹趋于无穷远处，其渐近线与实轴的交点及夹角分别为

$$\sigma_a = \frac{(-4)+(-1+j)+(-1-j)-(-1)}{4-1} = -\frac{5}{3},\quad \phi_a = \frac{(2k+1)}{4-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & (k=0) \\ \pi & (k=1) \\ \frac{5\pi}{3} & (k=2) \end{cases}$$

该系统有四条根轨迹分支，分别起于四个开环极点，其中一条终于开环零点 $z=-1$，另外三条沿渐近线趋于无穷远，三条渐近线如图 4.7 所示。

法则 5 根轨迹的分离点与会合点 两条或两条以上根轨迹分支相遇又分离的点，称为根轨迹的分离点与(或)会合点，如图 4.8 所示，设该点为 d，则交点坐标 d 是下列方程的解。

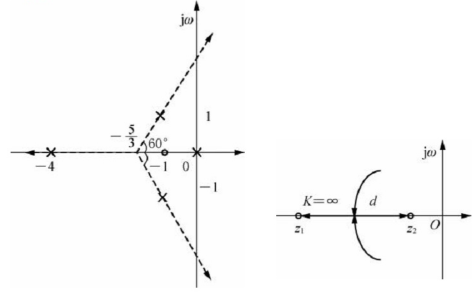


图 4.7 根轨迹的渐近线　　图 4.8 根轨迹与实轴的交点图

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d-z_i} \tag{4-11}$$

证明：方法1　由根轨迹方程式(4-5)有

$$1+\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=0$$

闭环特征方程为

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$$

或

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)=-K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \tag{4-12}$$

根轨迹在S平面相遇，说明闭环特征方程有重根出现，根据代数中重根条件，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)=-K^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \tag{4-13}$$

将式(4-12)和式(4-13)等号两端对应相除，得

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\ln\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\mathrm{d}s}$$

有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\ln(s-p_j)}{\mathrm{d}s}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}\ln(s-z_i)}{\mathrm{d}s}$$

从而得到

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{s-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i} \tag{4-14}$$

满足式（4-15）的s值即为系统闭环特征方程的重根，也就是分离点d，故式(4-11)得证。

值得注意的是，当系统没有开环零点时，式(4-11)的右端按0处理，即式(4-11)改为：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d-p_j}=0 \tag{4-15}$$

方法2　系统的开环传递函数也可表示为

$$G(s)H(s)=\frac{K^{*}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\frac{K^{*}M(s)}{N(s)}$$

闭环特征方程为

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K^{*}M(s)}{N(s)}=\frac{N(s)+K^{*}M(s)}{N(s)}=0$$

根轨迹在 S 平面相遇，说明闭环特征方程有重根出现，根据代数中重根条件，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[1+\frac{K^{*}M(s)}{N(s)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{K^{*}M(s)}{N(s)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}K^{*}\left[\frac{M(s)}{N(s)}\right]=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{M(s)}{N(s)}\right]=0 \text{ 或 } M'(s)N(s)-M(s)N'(s)=0 \tag{4-16}$$

注意：

(1) 根轨迹的分离点与会合点 d 一般都在实轴上，但不排除分离点与会合点 d 为共轭复数。

(2) 可以证明，由实轴过渡到复平面的根轨迹的分支在分离点处或由复平面过渡到实轴的根轨迹的分支在会合点处垂直于实轴。

【例4-3】 某单位负反馈控制系统开环传递函数为

$$G(S)H(S)=K^{*}\frac{s+2}{s(s+1)(s+4)}$$

试概略绘制系统根轨迹。

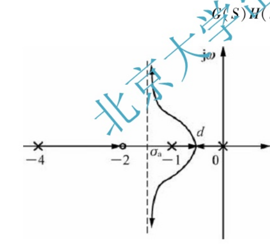


图4.9　概略根轨迹图

解： 系统有一个开环零点为 $z=-2$，有三个开环极点分别为 $s_1=0$、$s_2=-1$、$s_3=-4$，分别标在 S 平面上，如图4.9所示。

根据法则1、2，可知系统有三条根轨迹分支，分别起始于开环极点，一条终止于开环零点，两条沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为 $[-4,-2]$、$[-1,0]$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{(-1)+(-4)-(-2)}{3-1}=-\frac{3}{2},\phi_a=\frac{(2k+1)}{3-1}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (k=0)\\ \dfrac{3}{2}\pi & (k=1)\end{cases}$$

根据法则5，分离点坐标为

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+2}$$

解之得 $d\approx-0.55$。

由以上条件概略绘制根轨迹如图 4.9 所示。

法则 6　根轨迹与虚轴的交点　若根轨迹与虚轴相交，则意味着闭环特征方程出现纯虚根。因此，可在闭环特征方程中令 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程 $G(s)H(s)+1=0$ 中，得到

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1=0$$

写出实部和虚部方程为

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=0\\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=0\end{cases} \tag{4-17}$$

由式(4-17)可解出 K^* 的值，以及所对应的虚轴交点坐标 ω。

此外，根轨迹与虚轴相交表明系统在相应 K^* 值下处于临界稳定状态，故亦可用劳斯稳定判据去求出交点的坐标值及其相应的 K^* 值。此处的根轨迹增益称为临界根轨迹增益。

【例 4-4】　已知某控制系统的开环传递函数如下

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+5)}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解： 系统有三个开环极点分别为 $s_1=0$、$s_2=-1$、$s_3=-5$，分别标在 S 平面上，如图 4.10 所示。

根据法则 1、2，可知系统有三条根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则 3，实轴上的根轨迹区段为 $(-\infty,\ -5]$、$[-1,\ 0]$。

根据法则 4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{(-1)+(-5)}{3}=-2,\ \phi_a=\frac{(2k+1)}{3}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}(k=0)\\ \pi\ \ (k=1)\\ -\dfrac{\pi}{3}(k=2)\end{cases}$$

根据法则 5，由式(4-16)有

$$N(s)M'(s)-N'(s)M(s)=\frac{\mathrm{d}[s(s+1)(s+5)]}{\mathrm{d}s}=0$$

经整理得 $3s^2+12s+5=0$，解之得 $s_1\approx-3.5$、$s_2\approx-0.47$。由于实轴上的根轨迹位于 $[-1,\ 0]$ 间，故取 $s_2=s_2\approx0.47$。

根据法则 6，求根轨迹与虚轴交点

方法 1　系统闭环特征方程为 $s^3+6s^2+5s+K^*=0$。

令 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-6\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-\omega^3+5\omega=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0\end{cases}$、$\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{5}\\ K^*=30\end{cases}$，显然第一组解是根轨迹的起点，故舍去。根轨迹与虚轴的交点为 $s=\pm\sqrt{5}\mathrm{j}$，对应的根轨迹增益 $K^*=30$。

方法 2　用劳斯稳定判据求根轨迹与虚轴的交点。

系统的闭环特征方程为 $s^3+6s^2+5s+K^*=0$，列劳斯表如下：

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K^* \\ s^1 & \dfrac{(30-K^*)}{6} & 0 \\ s^0 & K^* & \end{array}$$

当 $K^*=30$ 时 s^1 行元素全为零，系统存在共轭虚根，由 s^2 行列辅助方程为

$$F(s)=6s^2+K^*\big|_{K^*=30}=0$$

解得 $s=\pm\sqrt{5}\mathrm{j}$，为根轨迹与虚轴的交点。绘制出系统根轨迹如图 4.10 所示。

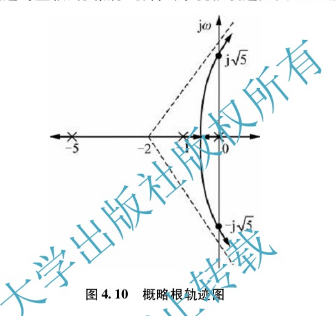


图 4.10　概略根轨迹图

法则 7　根轨迹的出射角和入射角　根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角，称为出射角，以 θ_{p_i} 表示；根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴的夹角，称为入射角，以 ϕ_{z_i} 表示，如图 4.11 所示。出射角、入射角可直接利用相角条件求出。

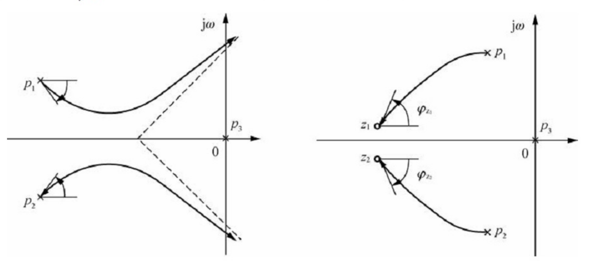


图 4.11　根轨迹的出射角和入射角

下面以图4.12所示开环极点与零点分布为例，计算开环复极点处根轨迹的出射角。在无限靠近开环复极点 p_1 的根轨迹上取一点 A。因为 A 点无限接近 p_1，故对 A 点按照相角条件列等式，与对 p_1 点按照相角条件列出的等式是一样的，即为

$$\angle(p_1-z_1)-\theta_{p_1}-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)=(2k+1)\pi$$

由此求得出射角

$$\theta_{p_1}=-(2k+1)\pi+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

仿照上式可写出计算极点 p_l 处根轨迹出射角的一般表达式为

$$\theta_{p_l}=-(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_l-z_j)-\sum_{i=1}^{l-1}\angle(p_l-p_i)-\sum_{i=l+1}^{n}\angle(p_l-p_i)\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{4-18}$$

根据同样的方法，可以写出计算零点 z_l 处根轨迹入射角的一般表达式为

$$\phi_{z_l}=(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_l-p_j)-\sum_{j=1}^{l-1}\angle(z_l-z_j)-\sum_{j=l+1}^{m}\angle(z_l-z_j)\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{4-19}$$

根据上述分析，在绘制闭环系统根轨迹图时，始于开环极点处的根轨迹的出射角按式(4-18)计算，止于开环零点处的根轨迹的入射角按式(4-19)计算。

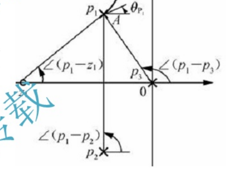


图4.12 出射角与入射角的求解示意图

法则8 根之和 当开环传递函数 $G(s)H(s)$ 分子、分母阶次差 $n-m\geqslant2$ 时，系统闭环极点之和等于系统开环极点之和，即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{j=1}^{n}p_j\quad(n-m\geqslant2)$$

式中 λ_i 为系统的闭环极点(特征根)，p_j 为系统的开环极点。

证明：设系统的特征方程为

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0\tag{4-20}$$

系统的特征方程也可由闭环极点 λ_i 表示为

$$\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=0\tag{4-21}$$

若 $n-m\geqslant2$，则将式(4-20)与式(4-21)展开后有

$$s^n+\left[\sum_{i=1}^{n}(-p_i)\right]s^{n-1}+\cdots=s^n+\left[\sum_{i=1}^{n}(-\lambda_i)\right]s^{n-1}+\cdots=0$$

比较 s^{n-1} 项的系数有

$$\sum_{i=1}^{n}(-\lambda_i)=\sum_{j=1}^{n}(-p_j)\tag{4-22}$$

注意，式(4-22)表明，一旦开环极点 p_j 确定，则系统的闭环极点之和为确定数，不会随 K^* 的变化而变化。当 $n-m\geqslant2$ 时，随着 K^* 的增大，若一部分极点总体向右移动，

因为极点之和为确定数，则另一部分极点必然总体向左移动，且左右移动的距离增量相等。该特性对判断根轨迹的走向很有意义。

根据以上绘制根轨迹的八条法则，不难绘出系统的根轨迹。具体绘制某一根轨迹时，这八条法则并不一定全部用到，要根据具体情况确定应选用的法则。为了便于查阅，将这些法则统一归纳在表 4 -2 之中。

表 4 -2　根轨迹绘制基本法则表

内容	法则
根轨迹的起点和终点	根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点或无穷远
根轨迹的分支数、对称性和连续性	根轨迹的分支数与开环零点数 m 与开环极点数 n 的大者相等，根轨迹连续并对称于实轴
实轴上的根轨迹	实轴上的某一区域，若其右端开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是 180°根轨迹。 * 实轴上的某一区域，若其右端开环实数零、极点个数之和为偶数，则该区域必是 0°根轨迹
根轨迹的渐近线	渐近线与实轴的交点：$\sigma_a=\dfrac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$ 渐近线与实轴夹角： $\phi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$　$(k=0,1,\cdots,n-m-1)$　（180°根轨迹） * $\phi_a=\dfrac{2k\pi}{n-m}$　$(k=0,1,\cdots,n-m-1)$　（0°根轨迹）
根轨迹的分离点与会合点	分离点的坐标 d 是方程 $\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_i}$ 的解； 或方程 $N(s)M'(s)-N'(s)M(s)=0$ 的解； 或方程 $\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{M(s)}{N(s)}\right]=0$ 的解
根轨迹与虚轴的交点	在闭环特征方程中令 $s=j\omega$，然后代入特征方程 $G(s)H(s)+1=0$ 中，由实部与虚部方程： $\begin{cases}\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)+1]=0\\ \mathrm{Im}[G(j\omega)H(j\omega)+1]=0\end{cases}$ 可解出 ω 与 K^*，或由劳斯稳定判据解出 ω 与 K^*
根轨迹的出射和入射角	180°根轨迹出射角方程： $\theta_{p_l}=-(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_l-z_j)-\sum_{i=1}^{l-1}\angle(p_l-p_i)-\sum_{i=l+1}^{n}\angle(p_l-p_i)$　$(k=0,1,2,\cdots)$； 180°根轨迹入射角方程： $\phi_{z_l}=(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_l-p_j)-\sum_{j=1}^{l-1}\angle(z_l-z_j)-\sum_{j=l+1}^{m}\angle(z_l-z_j)(k=0,1,2,\cdots)$； * 0°根轨迹出射角、入射角方程： $\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle\phi_i-\sum_{i=1}^{n}\angle\theta_j=2k\pi(\mathrm{k}=0,\pm1,\cdots)$（0°根轨迹）
根之和	$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{j=1}^{n}p_j$　$(n-m\geqslant2)$

注：最小相位系统绘制的根轨迹称为 180°根轨迹；非最小相位系统绘制的根轨迹称为 0°根轨迹，具体定义见 4. 3 节。表中，“ * ” 表明的法则是 0°根轨迹的绘制法则。

4.2.2 根轨迹绘制举例

【例4-5】 某单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

试概略绘制系统根轨迹，并求临界根轨迹增益及该增益对应的三个闭环极点。

解： 系统有三个开环极点分别为 $p_1=0$、$p_2=-1$、$p_3=-2$，分别标在 S 平面上，如图4.13所示。

根据法则1、2，可知系统有三条根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为 $(-\infty,\ -2]$、$[-1,\ 0]$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{(-1)+(-2)}{3}=-1,\ \phi_a=\frac{(2k+1)}{3}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}(k=0)\\ \pi(k=1)\\ -\dfrac{\pi}{3}(k=2)\end{cases}$$

根据法则5，由式(4-16)可得

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=0$$

经整理得 $3d^2+6d+2=0$，解方程得到 $d_1\approx-1.577$、$d_2=-0.423$。显然分离点位于实轴上 $[-1,\ 0]$，故取 $d_2=-0.423$。

根据法则6，求根轨迹与虚轴交点，系统闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+3s^2+2s+K^*=0$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-3\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-\omega^3+2\omega=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0\end{cases}$、$\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K^*=6\end{cases}$，显然第一组解是根轨迹的起点，故舍去。根轨迹与虚轴的交点为 $s=\pm\mathrm{j}\sqrt{2}$，对应的根轨迹增益 $K^*=6$ 为临界根轨迹增益。根轨迹与虚轴的交点为对应的两个闭环极点，第三个闭环极点可由根之和法则求得，即

$$0-1-2=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\lambda_3+\mathrm{j}\sqrt{2}-\mathrm{j}\sqrt{2}$$

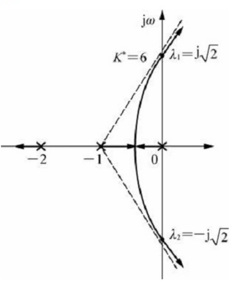


图4.13 例4-5系统根轨迹图

解之得 $\lambda_3=-3$。即当 $K^*=6$ 时，闭环系统的三个特征根分别为 $\lambda_1=\mathrm{j}\sqrt{2}$、$\lambda_2=-\mathrm{j}\sqrt{2}$、$\lambda_3=-3$。系统根轨迹如图4.13所示。

【例 4-6】 某单位负反馈系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+2.73)(s^2+2s+2)}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解：系统有四个开环极点，无开环零点。四个开环极点分别为 $p_1=0$、$p_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}$、$p_4=-2.73$，给定系统的有限开环零点个数为零。

根据法则 1、2，可知系统有四条连续且对称于实轴的根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则 3，实轴上的根轨迹区段为 $(-\infty, -2.73]$。

根据法则 4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{(-1+\mathrm{j})+(-1-\mathrm{j})+(-2.73)}{4}\approx -1.18，\ \phi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\begin{cases}\pm\dfrac{\pi}{4} & (k=0,\ 3)\\ \pm\dfrac{3\pi}{4} & (k=1,\ 2)\end{cases}\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & k=0\\ \dfrac{3}{4}\pi & k=1\\ \dfrac{-3\pi}{4} & k=2\\ -\dfrac{\pi}{4} & k=3\end{cases}$$

根据法则 5，起始于开环极点 $p_1=0$、$p_4=-2.73$ 的两条根轨迹分支脱离实轴时的分离点坐标由式(4-17)求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s(s+2.73)(s^2+2s+2)]\bigg|_{s=d}=0$$

解得 $d\approx -1.3$。

根据法则 6，起始于开环极点 $p_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}$ 的两条根轨迹分支与虚轴的交点由式(4-17)求解。设 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=\omega^4-7.46\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-4.73\omega^3+5.4\omega=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0\end{cases}$（舍去）、$\begin{cases}\omega_{2,3}=\pm 1.07\\ K^*=7.28\end{cases}$。

根据法则 7，起始于开环极点 $p_{2,3}=-1\pm \mathrm{j}$ 的两条根轨迹分支在 p_2、p_3 处的出射角，由式(4-18)分别求得 $\theta_{P_2}=-75°$ 及 $\theta_{P_3}=75°$，起始于开环极点 $p_1=0$ 的根轨迹分支在 p_1 处的出射角为 $\theta_{P_1}=180°$，起始于开环极点 $p_4=-2.73$ 的根轨迹分支在 p_4 处的出射角为 $\theta_{P_4}=0°$。系统根轨迹如图 4.14 所示。

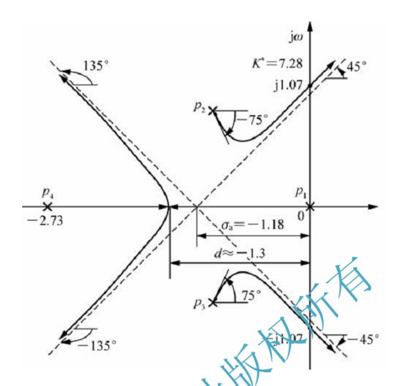


图 4.14 例 4 - 6 系统根轨迹图

【例 4 - 7】 某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解：系统有四个开环极点，无开环零点。四个开环极点分别为 $p_1=0$、$p_{2,3}=-2\pm \mathrm{j}4$、$p_4=-4$，给定系统的有限开环零点个数为零。

根据法则 1、2，可知系统有四条连续且对称实轴的根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则 3，实轴上的根轨迹区段为$[-4, 0]$。

根据法则 4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{(-2+\mathrm{j}4)+(-2-\mathrm{j}4)+(-4)}{4}=-2,\phi_a=\frac{2k+1}{4}=\begin{cases}\pm\dfrac{\pi}{4} & (k=0,3)\\ \pm\dfrac{3\pi}{4} & (k=1,2)\end{cases}$$

根据法则 5，分离点坐标由式(4 - 16)求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s(s+4)(s^2+4s+20)]\bigg|_{s=d}=0$$

解得 $d_1\approx -2$、$d_{2,3}\approx -2\pm \mathrm{j}\sqrt{6}$。

显然，根轨迹有三个分离点，分别为$(-2, -\mathrm{j}0)$、$(-2, \mathrm{j}\sqrt{6})$、$(-2, -\mathrm{j}\sqrt{6})$。

根据法则 6，有两条根轨迹分支与虚轴相交，其交点由式(4 - 17)求解。设 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=\omega^4-36\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-\omega^3+10\omega=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases}$（舍去）、$\begin{cases}\omega_{2,3}=\pm\sqrt{10}\\K^*=260\end{cases}$。

根据法则7，起始于开环极点 $p_{2,3}=-2\pm\mathrm{j}4$ 的两条根轨迹分支在 p_2、p_3 处的出射角，由式(4－18)分别求得 $\theta_{P_2}=-90°$及 $\theta_{P_3}=90°$，起始于开环极点 $p_1=0$ 的根轨迹分支在 p_1 处的出射角为 $\theta_{P_1}=180°$，起始于开环极点 $p_4=-4$ 的根轨迹分支在 p_4 处的出射角为 $\theta_{P_4}=0°$。系统根轨迹如图4.15所示。

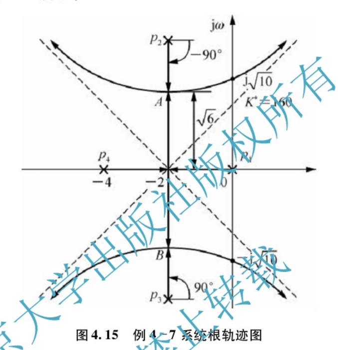


图4.15　例4－7 系统根轨迹图

【例4－8】　某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+2)}{s^2+2s+3}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解：系统有两个开环极点，分别为 $p_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}\sqrt{2}$；系统有一个开环零点，为 $z=-2$。

根据法则1、2，可知系统有两条连续且对称于实轴的根轨迹分支，分别起始于两个开环极点，一条终止于有限零点 $z=-2$，另一条沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为$(-\infty,\ -2]$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴夹角为

$$\sigma_a=\frac{(-1+\mathrm{j}\sqrt{2})+(-1-\mathrm{j}\sqrt{2})-(-2)}{2-1}=0,\ \phi_a=\frac{(2k+1)\ \pi}{2-1}=\pi(k=0)$$

根据法则5，起始于开环极点 $p_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}\sqrt{2}$的两实轴分支脱离实轴时的分离点坐标由式(4－16)求解，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+3}\right]\bigg|_{s=d}=0$$

解得 $d\approx -3.372$，故实轴上分离点坐标为(-3.372， $-j0$)。

对于给定的负反馈系统，起始于开环极点 $p_{1,2}=-1\pm j\sqrt{2}$的两实轴分支在实轴会合点(分离点)(-3.372， $-j0$)处相遇，随着变量 K^* 逐渐增大，一条分支趋向开环零点为$z=-2$，另一条分支沿负实轴趋于无穷远。根轨迹与虚轴无交点。

根据法则7，起始于开环极点 $p_{1,2}=-1\pm j\sqrt{2}$的两条根轨迹分支在 p_1、p_2 处的出射角由式(4－18)分别求得

$$\theta_{p_1}=180°+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)=180°+55°-90°=145°$$

$$\theta_{p_2}=180°+\angle(p_2-z_1)-\angle(p_1-p_2)=-180°-55°-(-90°)=-145°$$

系统根轨迹如图4.16所示。

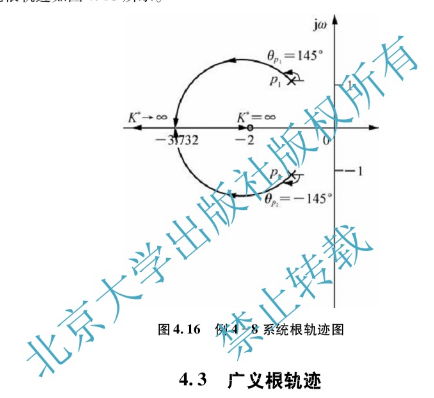


图4.16 例4－8系统根轨迹图

4.3 广义根轨迹

当系统开环根轨迹增益 K^* 或开环增益 K 发生变化时，可以使用常规根轨迹法则绘制根轨迹。但是，当系统存在正实部极点时，或当系统其他参数变化时，或当系统为正反馈时根轨迹的绘制方法将有所不同，本节将分别分析。

4.3.1 非最小相位根轨迹

在 S 平面右半部具有开环极点和(或)开环零点的反馈系统，称为非最小相位系统；反之，若全部开环极点和开环零点在 S 平面左半部，则称为最小相位系统，本章例4.2～例4.8都为最小相位系统。

绘制非最小相位系统根轨迹的基本规则与绘制最小相位系统根轨迹的基本规则完全相同，可完全按表4－2法则进行分析计算，下面以例题说明其绘制方法。

【例4－9】 某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解：系统有四个开环极点，分别为 $p_1=0$、$p_2=1$、$p_{3,4}=-2\pm \mathrm{j}3.46$；系统有一个开环零点，为 $z=-1$。

根据法则1、2，可知系统有四条连续且对称于实轴的根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于开环零点 $z=-1$ 与无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为 $(-\infty,\ -1]$、$[0,\ 1]$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{0+1+(-2+\mathrm{j}3.46)+(-2-\mathrm{j}3.46)-(-1)}{4-1}\approx -0.66,\quad \phi_a=\frac{2k+1}{4-1}=\begin{cases}\pm\dfrac{\pi}{3}(k=0,\ 2)\\ \pi(k=1)\end{cases}$$

根据法则5，起始于开环极点 $p_1=0$、$p_2=1$ 的两条根轨迹分支脱离实轴时的分离点坐标，以及起始于开环极点 $p_{3,4}=-2\pm \mathrm{j}3.46$ 的两条根轨迹分支由复平面进入实轴时的会合点坐标由式(4-17)求解，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1}\right]\bigg|_{s=d}=0$$

解得 $d_1=0.46$（分离点），$d_2\approx -2.22$（会合点）。

根据法则6，起始于开环极点 $p_1=0$、$p_2=1$ 的两条根轨迹与虚轴相交，其交点由式(4-18)求解。设 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=\omega^4-12\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1]=-3\omega^3+(K^*-16)10\omega=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0\end{cases}$（舍去）、$\begin{cases}\omega_{2,3}=\pm 1.56\\ K^*=23.3\end{cases}$、$\begin{cases}\omega_{4,5}=\pm 2.56\\ K^*=35.7\end{cases}$

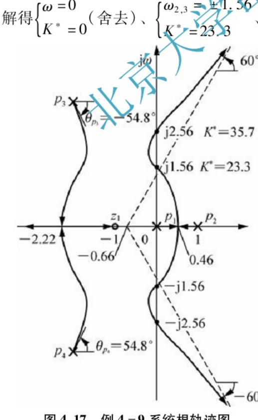


图 4.17　例 4-9 系统根轨迹图

根据法则7，起始于开环极点 $p_{3,4}=-2\pm \mathrm{j}3.46$ 的两条根轨迹分支在 p_3、p_4 处的出射角，由式(4-18)分别求得 $\theta_{p_3}=-54.8°$ 及 $\theta_{p_4}=54.8°$，起始于开环极点 $p_1=0$ 的根轨迹分支在 $p_1=0$ 处的出射角为 $\theta_{p_1}=0°$，起始于开环极点 $p_2=1$ 的根轨迹分支在 p_2 处的出射角为 $\theta_{p_2}=180°$。系统根轨迹如图4.17所示。

从根轨迹可见，欲使给定的非最小相位负反馈系统稳定，必须使闭环根都在 S 平面的左半部分，开环增益 K^* 的取值范围为 $23.3<K^*<35.7$。此类系统一般称为条件稳定系统，即 K^* 既不能大也不能小。若用劳斯稳定判据对 K^* 的范围进行判断，结果也是同样的。

4.3.2　参数根轨迹

绘制反馈系统的根轨迹时，其参量并非都是系统的根轨迹增益 K^*（或开环增益 K），有时为研

究除根轨迹增益 K^* 外其他参量对系统性能的影响，还常以时间常数、反馈系数等为参量绘制根轨迹图。

除根轨迹增益 K^*（或开环增益 K）以外的其他参量从零变化到无穷大时绘制的根轨迹称为参数根轨迹。

反馈系统参量根轨迹图的绘制，首先将系统的特征方程

$$G(s, X)H(s, X)+1=0$$

整理成如下形式的等效根轨迹方程，即

$$G'(s)H'(s)=\frac{XP(s)}{Q(s)}=-1$$

式中 $G(s, X)H(s, X)$ 为系统开环传递函数；X 为除根轨迹增益 K^* 以外的其他参量；$G'(s)H'(s)$ 为等效开环传递函数；$P(s)$、$Q(s)$ 为不含参变量 X 的复变量 s 的多项式，其中 s 最高次幂项的系数需化成 +1，即需将 $XP(s)/Q(s)$ 化成式(4-5)的标准形式。

绘制参变量 X 的根轨迹的法则内容和使用方法，同绘制以根轨迹增益 K^* 为参量的普通根轨迹一样。但必须明确，等效开环传递函数 $G'(s)H'(s)$ 对应的闭环零点与原系统的闭环零点并不一定一致。在确定系统闭环零点，估算系统动态性能时，必须回到原系统开环传递函数进行分析。下面举例说明参数根轨迹的绘制方法。

【例4-10】 单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)}$$

试概略绘制 $a\to\infty$ 的系统参数根轨迹。

解：首先写出系统的特征方程

$$s^3+s^2+\frac{1}{4}s+\frac{1}{4}a=0$$

经整理得 $G'(s)H'(s)=\dfrac{\frac{1}{4}a}{s^3+s^2+\frac{1}{4}s}=-1$。

由于等效开环传递函数对应的闭环特征方程与原系统闭环特征方程相同，所以借助等效开环传递函数 $G'(s)H'(s)$ 的形式，利用普通根轨迹的绘制法则绘制系统的根轨迹。

等效开环传递函数有三个开环极点分别为 $p_1=0$、$p_{2,3}=-\dfrac{1}{2}$，分别标在 S 平面上，如图4.18所示。

根据法则1、2，可知系统有三条根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$、$\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}=-\frac{1}{3},\ \phi_a=\frac{2k+1}{3}=\begin{cases}\frac{\pi}{3}(k=0)\\ \pi(k=1)\\ -\frac{\pi}{3}(k=2)\end{cases}$$

根据法则5，由式(4−15)有$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+\frac{1}{2}}+\frac{1}{d+\frac{1}{2}}=0$，解得 $d=-\frac{1}{6}$。

由幅值条件$\frac{a_d}{4}=|d|\left|d+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{54}$，可解得分离点处的 a 值为 $a_d=\frac{2}{27}$。

根据法则6，求根轨迹与虚轴交点。设 $s=j\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)+1]=-\omega^2+\frac{a}{4}=0\\ \mathrm{Im}[G(j\omega)H(j\omega)+1]=-\omega^3+\frac{\omega}{4}=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega=0\\ a=0\end{cases}$（舍去）、$\begin{cases}\omega=\pm\frac{1}{2}\\ a=1\end{cases}$。

系统根轨迹如图4.18所示。从根轨迹图中可以看出参数 a 变化对系统性能的影响。

（1）当 $0<a\leqslant 2/27$ 时，闭环极点落在实轴上，系统阶跃响应为单调过程。

（2）当 $2/27<a\leqslant 1$ 时，离虚轴近的一对复数闭环极点逐渐向虚轴靠近，系统阶跃响应为振荡收敛过程。

（3）当 $a>1$ 时，有闭环极点落在 S 右半平面，系统不稳定，阶跃响应振荡发散。

图4.18　例4−10 系统根轨迹图

从原系统开环传递函数可见，$s=-1$ 是系统的一个固定零点，但在参数根轨迹图上其位置是变化的，计算系统性能必须考虑其影响。

4.3.3　根轨迹簇的绘制

有时需要研究两个参量同时变化对系统性能的影响。例如，在设计一个校正装置传递函数的零、极点时，就需要研究这些零、极点取不同值对系统性能的影响。为此，需要绘制几个参量同时变化时的根轨迹，所做出的根轨迹是一组曲线，称为根轨迹簇。

【例4−11】　某负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+a)}{s(s^2+2s+2)}$$

试概略绘制 K^* 为不同值时，以 a 为参变量的根轨迹，并讨论 a 对系统稳定性的影响。

解：（1）绘制 $a=0$ 时的根轨迹。

当 $a=0$ 时，开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s^2+2s+2}$$

开环传递函数有两个开环极点分别为 $p_{1,2}=-1\pm j$。

根据法则1、2，可知系统有两条根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上无根轨迹。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a=\frac{(-1+j)+(-1-j)}{2}=-1、\phi_a=\frac{2k+1}{2}=\pm\frac{\pi}{2}(k=0,\ 1)$$

根据法则6，根轨迹与虚轴无交点，系统根轨迹如图4.19(a)所示。

(2) 绘制 a 为参变量时的根轨迹。

首先将写出系统的特征方程

$$D(s)=s^3+2s^2+2s+K^*s+K^*a=0$$

经整理得到以 a 为参变量的等效开环传递函数为

$$G'(s)H'(s)=\frac{K^*a}{s(s^2+2s+2+K^*)}=-1$$

等效开环传递函数有三个开环极点分别为 $p_1=0$、$p_{2,3}=-1\pm j\sqrt{1+K^*}$，分别标在 S 平面上，如图4.19(b)所示。

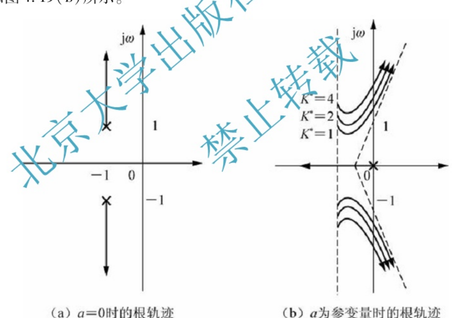


图4.19 例4-11 系统根轨迹图

根据法则1、2，可知系统有三条根轨迹分支，分别起始于开环极点，并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为 $(-\infty,\ 0]$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴交点和夹角分别为

$$\sigma_a = -0.667,\ \phi_a = \frac{(2k+1)}{3} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3}\ (k=0) \\ \pi(k=1) \\ -\dfrac{\pi}{3}(k=2) \end{cases}$$

根据法则6，求根轨迹与虚轴交点。设 $s=\mathrm{j}\omega$，然后代入特征方程中，令实部与虚部为零，则有

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1] = -\omega^3+2\omega+K^*\omega=0 \\ \mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)+1] = -2\omega^2+K^*a=0 \end{cases}$$

解得根轨迹与虚轴的交点频率以及相应点的参变量值分别为

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{K^*a}{2}}、a=\frac{4+2K^*}{K^*}$$

根据法则7，起始于开环极点 $p_{2,3}=-1\pm\mathrm{j}\sqrt{K^*}$ 的两条根轨迹分支在 p_2、p_2 处的出射角可由式(4-18)分别求得

$$\theta_{p_2} = 180° - \angle(p_2-p_1) - \angle(p_2-p_3) = 180° - 90° - \angle(p_2-p_1) = 90° - \angle(p_2-p_1)$$

$$\theta_{p_3} = -180° - \angle(p_3-p_1) - \angle(p_3-p_2) = -180° + 90° - \angle(p_3-p_1) = -90° - \angle(p_3-p_1)$$

将上述表达式分别计算，并列表4-3。

表4-3　a 为参变量时的根轨迹计算表

K^*	$p_{2,3}$	θ_{p_2}	ω	a
4	$-1\pm\mathrm{j}2.23$	$-24.15°$	±2.45	3
2	$-1\pm\mathrm{j}1.73$	$-30°$	±2	4
1	$-1\pm\mathrm{j}1.41$	-35.2	±1.73	6

4.3.4　零度根轨迹

在负反馈条件下系统特征方程为 $1+G(s)H(s)=0$，根轨迹方程为 $G(s)H(s)=-1$，相角条件为 $\angle G(s)H(s)=(2k+1)\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \cdots)$，因此称相应的常规根轨迹为180°根轨迹；而在正反馈条件下，系统特征方程为 $1-G(s)H(s)=0$ 时，根轨迹方程为 $G(s)H(s)=1$，相角条件为 $\angle G(s)H(s)=2k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \cdots)$，绘制的根轨迹称为0°根轨迹。

0°根轨迹绘制法则与180°根轨迹的绘制法则有所不同。设系统为正反馈，则系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

系统的闭环特征方程为 $1-G(s)H(s)=0$，将式(4-3)代入为

$$G(s)H(s) = K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} = 1 \qquad (4-23)$$

幅值条件为

$$|G(s)H(s)| = K^* \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s - z_i)|}{\prod_{j=1}^{n} |(s - p_j)|} = 1 \tag{4-24}$$

相角条件为

$$\begin{aligned} \angle G(s)H(s) &= \sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s - p_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \angle\phi_i - \sum_{j=1}^{n} \angle\theta_j = 2k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots) \end{aligned} \tag{4-25}$$

显然，0°根轨迹与180°根轨迹的幅值条件一致，而二者相角条件不同。因此，绘制180°根轨迹法则中与相角条件无关的法则可直接用来绘制0°根轨迹，而与相角条件有关的法则3、法则4、法则7则需要相应修改。修改调整后的法则如下。

法则3* 实轴上的根轨迹：实轴上的某一区域，若其右端开环实数零、极点个数之和为偶数，则该区域必是根轨迹。

法则4* 根轨迹的渐近线与实轴夹角应改为

$$\phi_a = \frac{2k\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-m-1)$$

法则7* 根轨迹的出射角和入射角用式(4-25)推导出。

0°根轨迹出射角

$$\theta p_l = \sum_{j=1}^{m} \angle(p_l - z_j) - \sum_{i=1}^{l-1} \angle(p_l - p_i) - \sum_{i=l+1}^{n} \angle(p_l - p_i)(K = 0,1,2\cdots)$$

0°根轨迹入射角

$$\phi z_l = \sum_{i=1}^{n} \angle(z_l - p_j) - \sum_{j=1}^{l-1} \angle(z_l - z_i) - \sum_{j=l+1}^{m} \angle(z_l - z_j)(K = 0,1,2\cdots)$$

除上述三个法则外，其他法则不变。为了便于使用，也将绘制0°根轨迹法则归纳于表4-2中，与180°根轨迹不同的绘制法则以星号("*")标明。

【例4-12】 某单位正反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解： 系统为正反馈，应绘制0°根轨迹。系统有三个开环极点，分别为 $p_{1,2} = -1 \pm j$、$p_3 = -3$，有一个开环零点，为 $z = -2$。

根据法则1、2，可知系统有三条连续且对称于实轴的根轨迹分支，分别起始于开环极点，一条终止于开环零点 $z = -2$，另外两条并沿渐近线终止于无穷远。

根据法则3，实轴上的根轨迹区段为$(-\infty, -3]$、$[-2, +\infty)$。

根据法则4，根轨迹的渐近线与实轴夹角和交点为

$$\sigma_a = \frac{(-3) + (-1+j) + (-1-j) - (-2)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\phi_a = \frac{2k\pi}{2} = \begin{cases} 0°(k=0) \\ 180°(k=1) \end{cases}$$

根据法则5，分离点方程为$\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1-\mathrm{j}}+\frac{1}{d+1+\mathrm{j}}=\frac{1}{d+2}$，解得$d=-0.8$，故实轴上分离点坐标为$(-0.8, -\mathrm{j}0)$。

根据法则7，起始于开环极点$p_1=-1+\mathrm{j}$的根轨迹分支在p_1处的出射角为

$$\theta_{p_1}=0°+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)=0°+45°-90°-26.6°=-71.6°$$

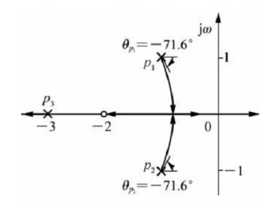


图 4.20　例 4－12 系统根轨迹图

根据对称性，起始于开环极点$p_2=-1-\mathrm{j}$的根轨迹分支在p_2处的出射角为$\theta_{p_2}=71.6°$。系统根轨迹如图4.20所示，根轨迹与虚轴交于坐标原点，对应的根轨迹增益为临界根轨迹增益，可由幅值条件求得

$$K^*=\frac{|0-(-1+\mathrm{j})||0-(-1-\mathrm{j})||0-(-3)|}{|0-(-2)|}=3$$

由于开环增益$K=\frac{K^*}{3}$，于是临界开环增益$K=1$。因此，为了使该正反馈系统稳定，开环增益应小于1。

【思考题】

（1）非最小相位根轨迹以及零度根轨迹与常规根轨迹的区别在哪里？

（2）参数根轨迹绘制时，如何进行开环传递函数的变化？

（3）两个参量同时变化时，如何绘制系统根轨迹？

4.4　开环零、极点对系统性能的影响

由于根轨迹是由开环零、极点决定的，因此在系统中增加开环零、极点或改变零、极点在S平面上的位置，都可以改变根轨迹的形状。如果系统的性能不尽如人意，通过调整开环系统零、极点的分布，可以改变根轨迹的形状，进而改善系统的品质。本节将讨论开环零、极点，以及开环偶极子对系统性能的影响。

4.4.1　增加开环零点对根轨迹的影响

设开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s^2(s-p)}$$

其闭环根轨迹如图4.21(a)所示，系统是结构不稳定的。现附加一个开环零点，其开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z)}{s^2(s-p)}\ (p<0,\ z<0)$$

其渐近线与实轴交点和夹角为$\sigma_a=\frac{p-z}{2}$，$\phi_a=\pm\frac{\pi}{2}$。

显然，改变零点z的值，可以改变渐近线的位置σ_a值和方向，从而改变根轨迹的走

向和趋势。下面就讨论 z 值取不同值时对根轨迹的影响。

(1) $z<p$，零点 z 位于极点 p 的左侧，此时 $\sigma_a>0$。起始于坐标原点的两条根轨迹的渐近线位于 S 平面的右半部，系统仍然是不稳定的，其根轨迹如图 4.21(b)所示。

(2) $z=p$，$s-z$ 与 $s-p$ 相消，$\sigma_a=0$。起始于坐标原点的两条根轨迹位于虚轴上，系统临界稳定，如图 4.21 (c)所示。

(3) $z>p$，$\sigma_a<0$，起始于坐标原点的两条根轨迹的渐近线位于 S 平面的左半部，系统稳定，如图 4.21(d)所示。

(4) $z=0$，零点与位于坐标原点的一个极点相消，系统成为无开环零点，只有两个开环极点的系统，根轨迹如图 4.21(e)所示，系统是稳定的。

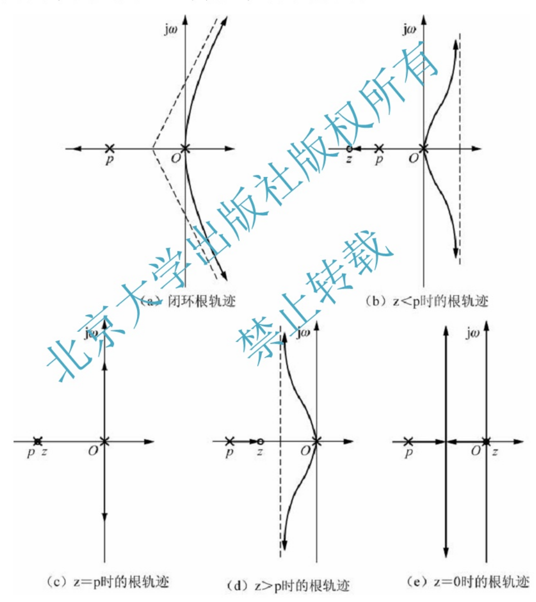


图 4.21 增加开环零点对根轨迹的影响图

综上所述，附加的开环零点对根轨迹的影响表现如下：

(1) 改变了实轴上根轨迹的分布。

(2) 改变了根轨迹渐近线与实轴的交点坐标值。

(3) 使根轨迹向左移动(偏移)，附加零点越靠近虚轴，这种作用越大。

(4) 开环零、极点重合或很接近时，即它们之间的距离比它们的模值小一个数量级，同时它们之间的距离比到其他零、极点的距离也小一个数量级时，则这一对开环零、极点称为开环偶极子。如果人为地加入开环零点和系统原有的开环极点构成开环偶极子，那么因为开环偶极子中的零点和极点相互抵消，就可抵消某个原有的开环极点对系统性能产生的有利影响。

4.4.2 增加开环极点对根轨迹的影响

设开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+2)}$$

其根轨迹如图4.22(a)所示，系统始终是稳定的。

增加一个开环极点，其开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+2)(s-p)}$$

p 分别取 -4 和 0 时的根轨迹如图4.22（b）、（c）所示。

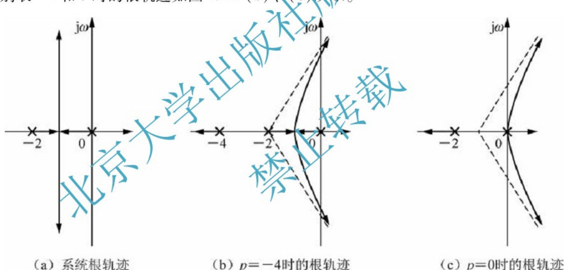


图4.22 增加开环极点对根轨迹的影响图

由此可见，增加开环极点后：

(1) 改变实轴上根轨迹的分布。

(2) 增加根轨迹渐近线的条数，改变了渐近线与实轴的交点坐标和夹角。

(3) 使根轨迹向右偏移，降低了系统的稳定度。开环极点离虚轴越近，这种作用越大。

4.4.3 增加开环偶极子对根轨迹的影响

由于开环偶极子中的零点 z_c 和极点 p_c 的距离比它们的模值小一个数量级，即两者相当靠近，所以两者对 S 平面上某点提供的幅值和相角相等或接近，即

$$\begin{cases}\angle(s-z_c)\approx\angle(s-p_c)\\|s-z_c|\approx|s-p_c|\end{cases}$$

s 越远离偶极子，这两个方程的近似程度就越高。这样，当引入一对靠近坐标原点的偶极子时，不会影响主导极点处附近的根轨迹形状，但它能增大系统的开环增益，从而改善系统的稳态性能。

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{s^v\prod_{j=v+1}^{n}(s-p_j)}$$

式中 K^* 为系统开环根轨迹增益。而系统的开环增益 K 可表示为

$$K=\lim_{s\to0}s^v\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{s^v\prod_{j=v+1}^{n}(s-p_j)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(z_i)}{\prod_{j=v+1}^{n}(p_j)}$$

如果在原系统开环零极点的基础上，增加一对离坐标原点很近的零极点 z_c 和 p_c 构成偶极子，则系统开环增益 K'变为

$$K'=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(z_i)}{\prod_{j=v+1}^{n}(p_j)}\frac{z_c}{p_c}=K\frac{z_c}{p_c}$$

显然，只要合理地配置偶极子中的开环零、极点，就可以在不影响动态特性的基础上，显著地改善系统的稳态性能。例如，$z_c=-0.5$，$p_c=-0.4$，系统的开环放大系数可提高1.25倍。

综上所述，开环偶极子对根轨迹的作用是：

（1）开环偶极子不影响远离偶极子位置的根轨迹形状。

（2）开环偶极子不影响根轨迹上各点的根轨迹增益，但可影响根轨迹上各点的开环增益。因此，合理地配置偶极子中的开环零、极点，可以在不影响动态特性的基础上，改善系统的稳态性能。

4.5 用根轨迹分析控制系统

当控制系统的根轨迹做出后，就可以对系统进行分析和定量计算，下面介绍几个用根轨迹分析控制系统的实例。

【例4-13】 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

试用根轨迹分析系统的稳定性，若主导极点阻尼比 $\xi=0.5$，求系统的性能指标。

解： 将开环传递函数写成零、极点的形式

$$G(s)H(s)=\frac{2K}{s(s+1)(s+2)}=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

该系统的根轨迹已由例4.4完成，如图4.23所示。

根据阻尼比的要求，确定闭环主导极点 s_1 和 s_2 的位置。在 S 平面上做出 $\xi=0.5$ 时的阻尼线，使其与实轴负方向的夹角 $\beta=\arccos\xi=60°$，阻尼线与根轨迹的交点为 s_1。从根轨迹图上可得 $s_{1,2}=-0.33\pm j0.58$。

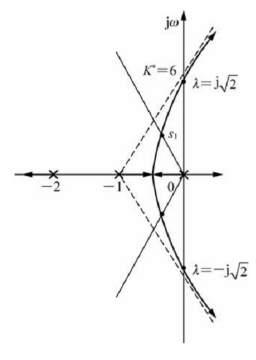


图4.23　例4－13系统根轨迹图

利用根轨迹图和幅值条件方程可求出 s_1 点对应的开环根轨迹增益 K^*。

$$\begin{aligned}K^*&=|s_1-p_1|\cdot|s_1-p_2|\cdot|s_1-p_3|\\&=0.66\times0.88\times1.76\\&\approx1.02\end{aligned}$$

故开环增益 $K=\frac{K^*}{2}=0.51$。

为了验证 $s_{1,2}$ 是闭环的主导极点，必须求出 $K^*=1.06$ 时的第三个闭环极点 s_3。由于 $n-m=3>2$，根据法则8有

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}p_i$$

$$s_3-0.33+j0.58-0.33-j0.58=0-1-2$$

$$s_3=-2.36$$

显然 s_3 距离原点较远，故 $s_{1,2}$ 为闭环主导极点，系统可以近似为二阶系统，闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{0.436}{s^2+0.66s+0.436}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

其中 $\omega_n=0.66$、$\xi=0.5$，系统性能指标为

$$\sigma\%=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%=16.3\%$$

$$t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}=\frac{3}{0.73}=9.1\text{s}$$

【例4－14】　已知正反馈系统结构图如图4.24所示。

(1) 绘出 $K^*\to\infty$ 变化时的闭环根轨迹(求出与虚轴交点、分离点)。

(2) 确定使系统稳定且为过阻尼状态的开环增益 K 的范围。

(3) 确定使系统阻尼 $\xi=0.707$ 对应开环增益 K 值和闭环极点坐标，并计算系统的动态性能(超调量 $\sigma\%$，调节时间 t_s)。

R(s)　+　$\frac{K^*}{s^2+8s+25}$　C(s)　$(s+5)^2$

图4.24　例4－14系统结构图

解： 系统的开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+5)^2}{s^2+8s+25}=\frac{K^*(s+5)^2}{(s+4+j3)(s+4-j3)}$$

（1）系统的开环增益 $K=K^*$。又由于此系统为正反馈系统，所以按0°根轨迹法则来绘制系统的根轨迹图。

系统有两个开环极点 $p_{1,2}=-4\pm j3$，两个开环零点 $z_{1,2}=-5$。

根轨迹有两个分支，这两条根轨迹分支分别起始于开环极点 $p_{1,2}=-4\pm j3$，终止于开环零点 $z_{1,2}=-5$。

实轴上的根轨迹为整个实轴。

此系统的根轨迹无渐近线。

分离点求解方程为$\dfrac{1}{d+4+j3}+\dfrac{1}{d+4-j3}=\dfrac{2}{d+5}$，解之得 $d=5$。

根据幅值方程可得 $K^*=\dfrac{|d^2+8d+25|}{|d+5|^2}=0.9$。

与虚轴的交点由闭环特征方程求得

$$D(s)=[(1-K^*)s^2+(8-10K^*)s+25(1-K^*)]|_{s=j\omega}=0$$

解之得$\begin{cases}K^*=0.8\\ \omega=\pm 5\end{cases}$、$\begin{cases}K^*=1\\ \omega=0\end{cases}$。

由以上分析绘制根轨迹如图4.25所示。

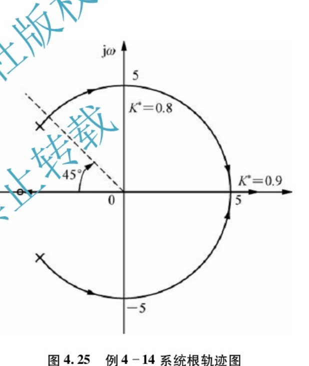


图4.25　例4-14系统根轨迹图

（2）由（1）中的分析可知，当 $K^*<0.8$ 或 $K^*>1$ 时，闭环系统稳定。又因为仅当 $K^*>1$ 时，系统的闭环特征根为两个负实根，所以，使系统稳定且为过阻尼状态的开环增益 K 的范围为 $K>1$。

（3）当系统阻尼 $\xi=0.707$ 时，即 $\beta=\arccos\xi=45°$，设 $s_{1,2}=-a\pm ja$。此时系统的闭环特征方程为

$$(s+a-ja)(s+a+ja)=s^2+2as+2a^2=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

闭环特征方程为

$$(1-K^*)s^2+(8-10K^*)s+25(1-K^*)=s^2+\frac{(8-10K^*)}{(1-K^*)}s+25=0$$

比较以上两式，$2a^2=\omega_n^2=25$，$\omega_n=5$，$a\approx 3.535$，即 $s_{1,2}=-3.535\pm j3.535$。

同时，$\dfrac{8-10K^*}{1-K^*}=2a=7.07$，解出$K=0.317$。

或由幅值条件，可知

$$K=K^*=\frac{|s_1+8s_1+25|}{|s_1+5|^2}=0.317$$

$$\sigma\%=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%\approx 4.33\%$$

$$t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}=\frac{3}{0.707\times 5}\approx 0.99s$$

【例 4 -15】 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

(1) 画出根轨迹。

(2) 能否通过选择 K^* 满足最大超调量 $\sigma\%\leqslant 4.32\%$ 的要求?

(3) 能否通过选择 K^* 满足调节时间 $t_s\leqslant 2s$ 的要求?

(4) 能否通过选择 K^* 满足误差系数 $K_p\geqslant 10$ 的要求?

解: 开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

(1) 绘制系统根轨迹。

渐近线与实轴夹角和交点分别为

$$\sigma_a=\frac{(-1)\times 2+(-4)\times 2}{4}=-2.5,\quad \phi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\begin{cases}\pm\dfrac{\pi}{4}(k=0,\ 3)\\ \pm\dfrac{3\pi}{4}(k=1,\ 2)\end{cases}$$

起始于开环极点 $p_{1,2}=-1$ 的根轨迹分支出射角为

$$-(0°+0°+2\theta_1)=(2k+1)\pi,\quad \theta_{1,2}=\pm 90°$$

起始于开环极点 $p_{3,4}=-4$ 的根轨迹分支出射角为

$$-(2\times 180°+2\theta_3)=(2k+1)\pi,\quad \theta_{3,4}=\pm 90°$$

与虚轴的交点，闭环特征方程为

$$D(s)=s^4+10s^3+33s^2+40s+16+K^*=0$$

令

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(\mathrm{j}\omega)]=\omega^4-33\omega^2+16+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(\mathrm{j}\omega)]=-10\omega^3+40\omega=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\omega=\pm 2\\ K^*=100\end{cases}$

系统根轨迹如图 4.26 所示。

图 4.26 例 4 -15 系统根轨迹图

(2) 由 $\sigma\%=4.32\%$ 得 $\sigma=0.707$，$\beta=\arccos\sigma=45°$，故过原点做一条 $\beta=45°$ 的等阻尼线与根轨迹交于 A 点，则 A 点对应共轭复根也必在根轨迹上。由根之和定理，设 $\lambda_{1,2}=-a\pm\mathrm{j}a$，则另外两个极点为 $\lambda_{3,4}=(-5+a)\pm\mathrm{j}a$。因此，有

$$\begin{aligned}D(s)&=(s+a+\mathrm{j}a)(s+a-\mathrm{j}a)(s+5-a+\mathrm{j}a)(s+5-a-\mathrm{j}a)\\&=s^4+10s^3+(25+10a)s^2+50as+(50-20a+4a^2)\end{aligned}$$

而由开环传函得到闭环特征方程为

$$D(s)=s^4+10s^3+33s^2+40s+16+K^*=0$$

比较上述两式系数

$$解得\begin{cases}a=0.8\\K^*=7.893\end{cases}。$$

可见，当取 $K^*\leqslant7.893$ 时，有 $\sigma\%\leqslant4.32\%$。

（3）要求 $t_s\leqslant2s$，即 $\xi\omega_n\leqslant1.75$。这表明主导极点必须位于S左半平面，且距离虚轴大于1.75。由根轨迹图知，在系统稳定的范围内，主导极点的实部绝对值均小于1，故调节时间 $t_s\leqslant2s$ 的要求不能满足。

（4）由于 $K_p=\lim\limits_{s\to0}G(s)=\dfrac{K^*}{16}$，使系统临界稳定的根轨迹增益 $K_c^*=100$。所以，使系统稳定的位置误差系数应满足

$$K_p<\frac{K_c^*}{16}=\frac{100}{16}=6.25$$

故无法选择 K^* 满足位置误差系数 $K_p\geqslant10$ 的要求。

【思考题】 增加的开环零点、开环极点、开环偶极子分别对根轨迹有什么影响？

4.6 MATLAB 绘制根轨迹

前几节已给出了绘制根轨迹的基本规则，根据这些规则，就能粗略地画出系统随某一参数变化时的根轨迹。本节将介绍用MATLAB绘制控制系统根轨迹的方法。

MATLAB绘制控制系统的根轨迹的指令如下：

（1）num：分子数组，由开环传递函数分子的各项系数构成。

（2）den：分母数组，由开环传递函数分母的各项系数构成。

（3）tf2zp：将传递函数模型转换成零、极点模型。

（4）zp2 tf：将零、极点模型转换成传递函数模型。

（5）conv（）：多项式乘积。

（6）rlocus：产生或绘制根轨迹图，格式为

rlocus (num, den)　直接绘制根轨迹图

[r,K]=rlocus(num,den)或[r,K]=rlocus(num,den,K)不直接显示根轨迹图，而是显示矩阵r和增益向量K值。根轨迹图可以用函数plot()来绘制。

（7）rlocfind（num，den）：求某一特征根所对应的具体值。

由于用MATLAB绘制控制系统的根轨迹时，其增益向量K是自动生成的，因而用MATLAB绘制控制系统的根轨迹，完全决定于数组num和den。

【例4-16】 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+3)}{(s^2+s)(s^2+4s+16)}$$

使用MATLAB绘制系统的根轨迹。

解：MATLAB程序如下：

```
num=[0 0 0 1 3];            % 定义开环系统分子数组
den=[1 5 20 16 0];          % 定义开环系统分母数组
rlocus(num,den);            % 绘制根轨迹
v=[-6 6 -6 6];axis(v);      % 定义坐标范围
```

```
title('Root-Locus Plot of K(s+3)/s(s+1)(s*2+4s+16)')
```

根轨迹如图 4.27 所示。

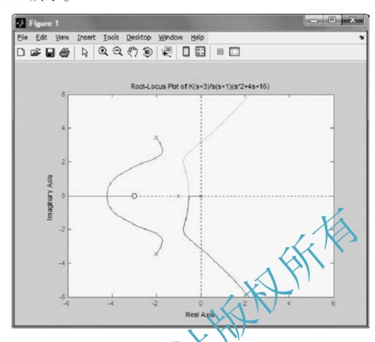


图 4.27　例 4-16 系统根轨迹图

【例 4-17】　单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+3)}{(s^2+6s+5)^2}$$

使用 MATLAB 绘制控制系统的根轨迹，并分析系统稳定性。

解： MATLAB 程序如下：

```
num=[1,3];
den1=[1,6,5];
den=conv(den1,den1);
figure(1);
rlocus(num,den); % 绘制根轨迹
[k,p]=rlocfind(num,den);

figure(2);
k=158;
num1=k*[1,3];
den=[1,6,5];
den1=conv(den,den);
[num,den]=cloop(num1,den1,-1);
impulse(num,den); % 脉冲响应
title('Impulse Response k=158');

figure(3);
k=162;
num1=k* [1,3];
den=[1,6,5];
den1=conv(den,den);
```

```
[num,den]=cloop(num1,den1,-1);
impulse(num,den); % 脉冲响应
title('Impulse Response k=162');
```

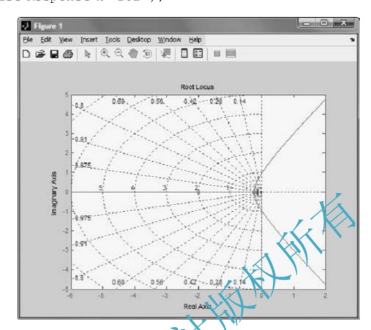


图 4.28 例 4-17 系统根轨迹图

由第1段程序得到根轨迹后，将十字线移到根轨迹与虚轴的交点上，可以在图上显示在交点处 $K^*=160$，使系统临界稳定的根轨迹增益 $K^*=160$，根轨迹如图 4.28 所示。执行第2、3段程序后，得到图 4.29 和图 4.30。当系统的根轨迹增益 $K^*=158$ 时，闭环系统的脉冲响应是收敛的，故系统稳定，但系统的阻尼非常小，超调量近似为 100%，接近临界稳定的状态。当 $K^*=162$ 时，闭环系统的脉冲响应是发散的，系统不稳定。

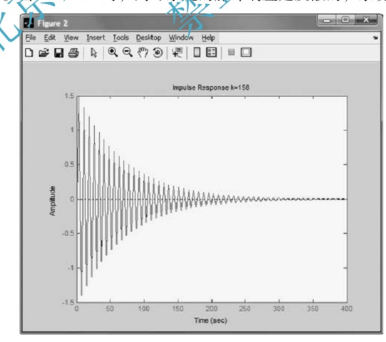


图 4.29 $K^*=158$ 脉冲响应图

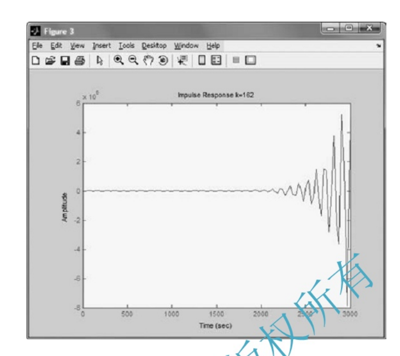


图 4.30 $K^*=162$ 脉冲响应图

【例 4-18】 一个双容水箱的液位控制系统如图 4.31 所示。

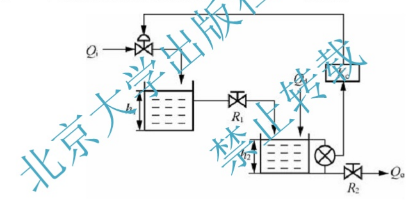


图 4.31 二阶串联水槽控制系统图

两个水槽对象、调节阀、变送器的传递函数分别是 G_1、G_2、G_V、G_B，控制器为比例控制器 $G_C=K_C$，被控变量是 h_2，Q_d 是扰动变量，系统等效方框图如图 4.32 所示。

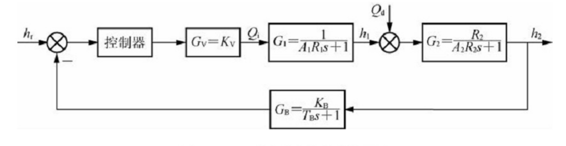


图 4.32 二阶串联水槽等效结构图

图中各元件参数为：$A_1=1000$ 为水槽 1 的横截面积；$R_1=0.005$ 为阀 1 的液阻；$A_2=$

800 为水槽 2 的横截面积；$R_2=0.005$ 为阀 2 的液阻；$K_B=1$ 为变送器的静态放大系数；$T_B=0.5$ 为变送器的时间常数；$K_V=1250$ 为调节阀的静态放大系数；K_C 为比例控制器放大倍数。

使用 MATLAB 绘制闭环系统随比例控制器参数 K_C 变化的根轨迹图，并找到临界增益，以及对应的极点。当取 $\xi=0.7$ 时，进行极点配置。

解： MATLAB 程序如下：

```
A1=1000;A2=800;R1=0.005;R2=0.005;KV=1250;KB=1;TB=0.5; % 输入参数
num1=[1];den1=[A1* R1 1];          % 输入水箱 1 参数
num2=[R2];den2=[A2* R2 1];         % 输入水箱 1 参数
numv=[KV];denv=[1];                % 输入调节阀放大倍数
numB=[KB];denB=[TB 1];             % 输入变送器参数
[num1v,den1v]=series(num1,den1,numv,denv);     % 调节阀环节与水箱 1 环节串联
[num2B,den2B]=series(numB,denB,num2,den2);     % 变送器环节与水箱 2 环节串联
[num,den]=series(num2B,den2B,num1v,den1v);     % 得到系统开环传递函数
sgrid('new');                                  % 绘制栅格线
rlocus(num,den);                               % 绘制根轨迹
[kc,p]=rlocfind(num,den)
```

根轨迹如图 4.33 所示，将十字光标移到根轨迹与虚轴的交点上，可以得到交点处的临界开环增益：

```
kc =3.7066
p =
   -2.4627
   -0.2123 +0.2117i
   -0.2123 -0.2117i
```

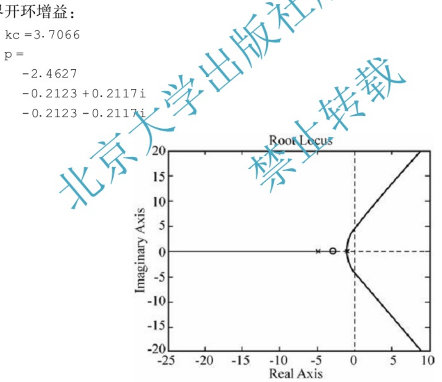



图 4.33 例 4-18 系统根轨迹图

根轨迹图已经绘有等阻尼比和自然频率构成的栅格线，将十字光标移到根轨迹与阻尼比 $\xi=0.7$ 等阻尼比线交点处，得到对应的比例增益和闭环极点：

```
kc =0.1313
p =
   -2.0253
```

```
0.0064 +0.9906i
0.0064 -0.9906i
```

此时系统有三个极点，其中两个是一对靠近虚轴的共轭复数极点，且附近无闭环零点，另外一个是远离虚轴的负实数极点，与虚轴的距离约为复数极点的10倍，因此这对共轭复数极点为主导极点，系统可以化简为由主导极点决定的二阶系统，其性能可由二阶系统的分析方法得到。

小　结

根轨迹法是研究高阶系统动态性能的一种图解分析、计算方法，讨论问题只在 S 平面中进行，不需求解时域响应，故又称之为复数域分析法。

根轨迹是系统某个参量从 $0\rightarrow\infty$ 变化时闭环特征根在 S 平面上移动描绘出的轨迹。

绘制系统闭环根轨迹，直接由系统开环零、极点并利用基本法则来完成。绘制时，应首先用起点和终点法则、渐近线法则、实轴区段法则及根之和法则判断一下总体特征，然后再计算有关的特征量如分离点、虚轴交点及起始角等，以尽可能避免全局失误。另外，S 平面的纵、横坐标的刻度比例应相同，否则图解计算将导致谬误。

运用根轨迹分析系统的动态性能，可直接由闭环零、极点并利用主导极点、偶极子概念及时域分析理论来完成。

在控制系统中适当增加一些开环零、极点，可以改变根轨迹的形状，从而达到改善系统性能的目的。一般情况下，增加开环零点可使根轨迹左移，有利于改善系统的相对稳定性和动态性能；相反地，单纯加入开环极点，则根轨迹右移，不利于系统的相对稳定性及动态性能。

本章所述根轨迹法则，只适用于负反馈系统或本质上相当于负反馈的系统，而与开环零、极点的分布无关（最小相位系统与非最小相位系统的根轨迹绘制方法相同），与系统是否为单位负反馈亦无关。

绘制参变量根轨迹的方法，同绘制以根轨迹增益 K^* 为参量的普通根轨迹一样。但必须明确，等效开环传递函数 $G'(s)H'(s)$ 对应的闭环零点与原系统的闭环零点并不一定一致。在确定系统闭环零点，估算系统动态性能时，必须回到原系统开环传递函数进行分析。

在正反馈条件下，系统特征方程为 $1-G(s)H(s)=0$ 时，根轨迹方程为 $G(s)H(s)=1$，相角条件为 $\angle G(s)H(s)=2k\pi$（$k=0,\ \pm1,\ \cdots$），绘制的根轨迹称为0°根轨迹。在绘制其根轨迹时，所有依据相方程证明而得出的基本法则都应有所变动。开环零、极点相同的正反馈系统和负反馈系统，根轨迹将完全不同。

习　题

1. 已知下列负反馈的开环传递函数，应画0°根轨迹的是(　　)。

A. $\dfrac{K^*(2-s)}{s(s+1)}$　　B. $\dfrac{K^*}{s(s-1)(s+5)}$　　C. $\dfrac{K^*}{s(s^2-3s+1)}$　　D. $\dfrac{K^*(1-s)}{s(2-s)}$

2. 若两个系统的根轨迹相同，则有相同的(　　)。

A. 闭环零点和极点 B. 开环零点 C. 闭环极点 D. 阶跃响应

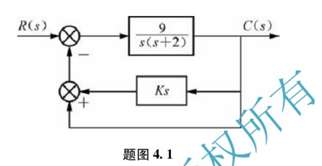
3. 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+6)(s+3)}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图$(0<K^*<\infty)$。

(2) 求系统临界稳定时的K^*值与系统的闭环极点。

4. 系统结构如题图4.1所示，绘制系统的根轨迹$(0<K<\infty)$，并确定系统欠阻尼状态下的K值。



题图 4.1

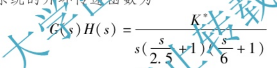
5. 已知负反馈控制系统的闭环特征方程为

$$K^*+(s+14)(s^2+2s+2)=0$$

(1) 绘制系统的根轨迹$(0<K^*<\infty)$。

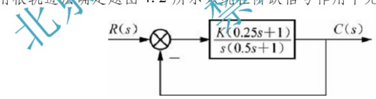
(2) 确定系统阻尼系数$\xi=0.5$的K^*值。

6. 已知单位反馈系统的开环传递函数为



$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s\left(\frac{s}{2.5}+1\right)\left(\frac{s}{6}+1\right)}$$

7. 应用根轨迹法确定题图4.2所示系统在阶跃信号作用下无超调的K值范围。



题图 4.2

8. 设正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

画出K变化时系统的根轨迹。

9. 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10(1-s)}{(0.5s+1)(Ts+1)}$$

画出T变化时系统的根轨迹。

10. 根据题4.9所画出的根轨迹，求系统处于临界稳定和临界阻尼时的T值；并求闭环系统在$T=20$时的单位阶跃响应。



11. 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{20}{s(s+1)(s+4)+20Ks}$$

要求系统的闭环极点有一对共轭复极点，其阻尼比为0.4，确定 K 值，并求出时域指标。

12. 已知控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s^4+5s^3+2s^2+7s}$$

用 MATLAB 绘制此系统的根轨迹和根轨迹的渐近线。

13. 系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+9)}$$

试用 MATLAB 绘制该系统的根轨迹。

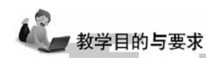
14. 已知单位反馈控制系统的前向通路传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

试用 MATLAB 绘制该系统的根轨迹。



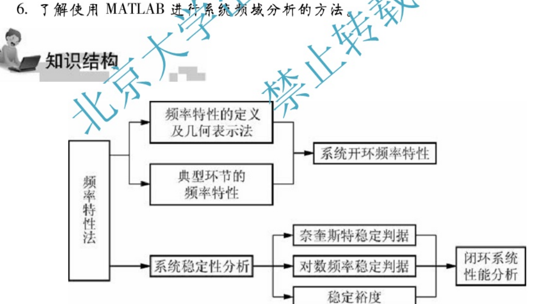
第5章 频率特性法



教学目的与要求

1. 理解频率特性的基本含义和常用的表示方法。
2. 掌握典型环节的频率特性。
3. 掌握系统开环频率特性曲线的绘制方法。
4. 掌握伯德图与系统动态性能之间的关系。
5. 熟练运用频率特性法分析系统性能。
6. 了解使用 MATLAB 进行系统频域分析的方法。

知识结构



在工程实践中，通常运用频率特性法来分析和设计系统。频率特性是控制系统的另一种数学模型。在研究方法上，与根轨迹法相似，也是不必直接求解系统的微分方程，而是间接地运用系统的开环特性来分析闭环响应的一种图解方法。由于频率特性有着确切的物理意义，因此频率法可以将理论分析和实验研究配合起来，扩大了在工程实际中应用的可能性。

本章将介绍频率特性的一般概念及作图方法，以及运用系统开环、闭环频率特性对

系统的动态过程进行定性分析和定量估算的方法。

5.1 频率特性的基本概念

5.1.1 频率特性的定义

设系统的结构图如图 5.1 所示。在系统的输入端加上如图 5.2(a)所示的正弦信号，系统在正弦输入作用下的动态过程，可用拉氏变换法求解。

$R(s)$ → $G(s)$ → $C(s)$

图 5.1 系统结构图

设输入信号为

$$r(t) = A_r \sin\omega t \tag{5-1}$$

其拉氏变换为

$$R(s) = \frac{A_r\omega}{s^2+\omega^2} \tag{5-2}$$

设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \tag{5-3}$$

其中 s_1，s_2，…，s_n 为特征方程的根。

输出响应的拉氏变换

$$\begin{aligned} C(s) = G(s)R(s) &= \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \cdot \frac{A_r\omega}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{A_1}{s+\mathrm{j}\omega} + \frac{A_2}{s-\mathrm{j}\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{s-s_i} \end{aligned} \tag{5-4}$$

对式（5-4）进行拉氏反变换，可得系统的输出响应

$$c(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \sum_{i=1}^{n} B_i \mathrm{e}^{s_i t} \tag{5-5}$$

对于稳定的系统，特征方程的所有根 s_i 都具有负实部，则 $c(t)$ 的第三部分瞬态分量，将随时间 t 的延续逐渐消失，系统最终以

$$c_s(t) = \lim_{t\to\infty} c(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{5-6}$$

做稳态运动。$c_s(t)$ 即是系统动态过程中的稳态分量，这恰是所要求解的部分。其中 A_1、A_2 或由式(5-4)经待定系数法求得。

$$A_1 = G(s)\frac{A_r\omega}{s^2+\omega^2} \cdot (s+\mathrm{j}\omega)\Big|_{s=-\mathrm{j}\omega} = G(-\mathrm{j}\omega)\frac{A_r}{-2\mathrm{j}} = \frac{|G(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle G(\mathrm{j}\omega)}A_r}{-2\mathrm{j}} \tag{5-7}$$

$$A_2 = G(s)\frac{A_r\omega}{s^2+\omega^2} \cdot (s-\mathrm{j}\omega)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega} = G(\mathrm{j}\omega)\frac{A_r}{2\mathrm{j}} = \frac{|G(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G(\mathrm{j}\omega)}A_r}{2\mathrm{j}} \tag{5-8}$$

将 A_1、A_2 代入式(5-6)得

$$
\begin{aligned}
c_s(t) &= A_r|G(j\omega)|\frac{e^{j[\omega t+\angle G(j\omega)]}-e^{-j[\omega t+\angle G(j\omega)]}}{2j} \\
&= A_r|G(j\omega)|\sin[\omega t+\angle G(j\omega)] \\
&= A_c\cdot\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}
\tag{5-9}
$$

系统的响应曲线如图5.2(b)所示。可以看出，系统的稳态输出是与输入同频率的正弦振荡，幅值和相位都是频率ω的函数，其振幅$A_c=A_r|G(j\omega)|$，相位$\omega t+\phi=\omega t+\angle G(j\omega)$。

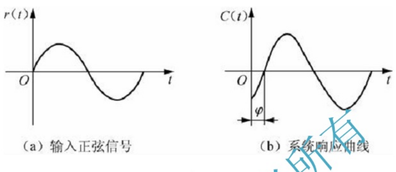


图5.2　系统输出响应曲线

显然，系统稳态输出与输入的幅值之比为$|G(j\omega)|$；稳态输出与输入之间的相位差为$\angle G(j\omega)$；而稳态输出与输入的复数之比为$G(j\omega)$。由此定义：

系统的幅频特性

$$A(\omega)=|G(j\omega)| \tag{5-10}$$

系统相频特性

$$\phi(\omega)=\angle G(j\omega) \tag{5-11}$$

系统的频率特性

$$A(\omega)e^{j\phi(\omega)}=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}=G(j\omega)=G(s)|_{s=j\omega} \tag{5-12}$$

频率特性又称为幅相特性。

由定义可知，将系统传递函数中的s用$j\omega$代替便可得到其频率特性，即频率特性与表征系统性能的传递函数之间有着直接的内在联系，故可由频率特性来分析系统性能。

这里要说明的是：

(1) 频率特性不只是对系统而言，其概念对控制元件、部件、控制装置也都可以用。

(2) 频率特性从其数学本质可以看出，只适用于线性定常模型，否则不能用拉氏变换求解，也不存在这种特殊的稳态对应关系。

(3) 上述推导是在假定线性微分方程稳定的条件下导出的。如果不稳定，则动态过程$c(t)$最终不可能趋于稳态振荡$c_s(t)$，当然也就无法由实际系统直接观察到这种稳态响应。但是由式(5-5)、式(5-6)、式(5-9)不难看出，理论上动态过程中的稳态分量总是可以分离出来的，而且其规律性并不依赖于系统的稳定性。因此可以扩展频率特性的概念，将频率特性定义为：在正弦输入下，线性定常模型输出的稳态分量与输入的复数比，以$G(j\omega)$表示。

(4) 由频率特性的表达式$G(j\omega)$可知，其中包含了系统或元、部件的全部动态结构和参数。故尽管频率特性是一种稳态响应，但动态过程的规律性必将寓于其中。和微分方程及传递函数一样，频率特性也常称之为动态数学模型。

频率法(也称频域分析法)就是运用稳态的频率特性间接研究系统的动态响应，从而

避免了直接求解高阶微分方程的困难。并且“正弦”、“稳态”也给试验、观测和工程计算创造了有利条件。

5.1.2 频率特性的几何表示法

频域分析是一种图解分析，这种方法的一大特点就是将系统的频率特性用曲线表示出来。工程上常采用的频率特性曲线有以下两种。

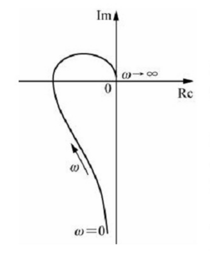


图 5.3 幅相频率特性曲线

1. 幅相频率特性曲线

幅相频率特性曲线又称为奈奎斯特曲线或极坐标图，简称奈氏曲线或奈氏图。它是以 ω 为参变量，将幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\phi(\omega)$ 同时表示在复平面上，如图 5.3 所示。

奈氏图的一般作图方法是，分别求出 $\omega=0$ 和 $\omega=+\infty$ 时的 $G(\mathrm{j}\omega)$，必要时还可在 $0<\omega<\infty$ 之间选取一些特殊的点，算出这些点处的幅频值和相频值，例如，利用 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的虚部 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]=0$ 的关系式或利用 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=n\cdot180°$（其中 n 为整数）求出曲线与实轴的交点；利用 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的实部 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]=0$ 的关系式，或利用 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=n\cdot90°$（其中 n 为整数）求出曲线与虚轴的交点。然后在幅相平面上作出这些点，并用光滑的曲线将它们连接起来。

2. 对数频率特性曲线

在工程实际中又常常将频率特性绘制成对数坐标图的形式，这种对数频率特性曲线称为伯德图，由对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线两部分组成，如图 5.4 所示。

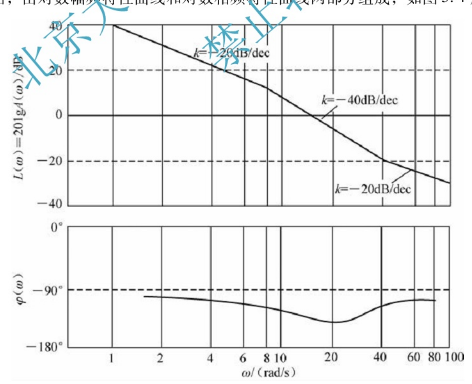
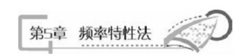


图 5.4 对数频率特性曲线



对数幅频特性曲线的横坐标表示 ω，按照 ω 的对数 $\lg\omega$ 分度，但以 ω 标注，单位为弧度/秒(rad/s)；频率每变化10倍，称为10倍频程，记作dec。纵坐标表示 $20\lg A(\omega)$，线性分度，单位为分贝(dB)。为简单起见，一般用符号 $L(\omega)$ 表示，即

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg|G(j\omega)| \tag{5-13}$$

对数相频特性曲线的横坐标也按 $\lg\omega$ 分度，纵坐标表示相频特性的相角 $\phi(\omega)$，按线性分度，单位是度。作图时，为使同一系统的对数幅频特性和对数相频特性相联系，一般也可以采用同一频率轴将两特性绘在一张半对数坐标纸上。

横坐标的对数分度的特点如图5.5所示，由于

$$\begin{aligned}&\omega=1, &&\lg\omega=0\\&\omega=10, &&\lg\omega=1\\&\omega=100, &&\lg\omega=2\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

图中频率轴上 ω_1 和 ω_2 之间的距离为 $\lg\omega_2-\lg\omega_1$，若 $\omega_2=10\omega_1$，则有

$$\lg\omega_2-\lg\omega_1=\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}=\lg10=1$$

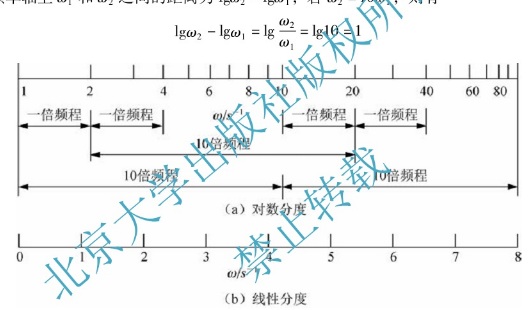


图5.5 对数分度的特点

显然，由于横坐标按 ω 的对数分度，而以 ω 标示，所以对 ω 而言是不均匀的，但是对 $\lg\omega$ 来讲是均匀的。频率 ω 从1~10的对数分度表见表5-1。由表5-1可知，频率每变化一倍(称为一倍频程)，间隔距离变化0.301单位长度。一个10倍频程的间隔距离等于1/0.301≈3.32个一倍频程的间隔距离。由于频率轴以 ω 的对数分度，故零频率的线性分度在 $-\infty$ 处。

表5-1 ω 从1~10的对数分度

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg\omega$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1

控制工程上采用对数坐标图的主要优点在于，利用对数运算可以将幅值的乘除运算转化为加减运算；可以展开视界，能够在一张图上清楚地画出系统频率范围很宽的特性曲线；可以用分段直线绘制近似的对数幅频特性，从而使频率特性的计算和绘制大为简化。

【思考题】　频率特性的两种几何表示方法的区别与联系是什么？

5.2　典型环节的频率特性

一个复杂的自动控制系统通常是由若干简单环节组成，根据其数学模型的特点，可以划分为几种典型环节。本节就从典型环节的传递函数出发，着重讨论这些典型环节的幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线的绘制方法及特点。

5.2.1　比例环节

传递函数　　$G(s)=K$

频率特性　　$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=K\angle 0°$　　(5-14)

幅频特性　　$A(\omega)=|G(\mathrm{j}\omega)|=K$　　(5-15)

相频特性　　$\phi(\omega)=\angle G(\mathrm{j}\omega)=0°$　　(5-16)

可见，比例环节的频率特性与 ω 无关。

1. 奈氏图

图 5.6　比例环节的奈氏图

按照奈氏图绘制方法绘制出当 $\omega=0\to\infty$ 变化时比例环节的奈氏图，如图 5.6 所示。它是复平面实轴上的一个点（K，j0°），表明比例环节正弦稳态响应的幅值是输入信号的 K 倍，且与输入同相位。

2. 伯德图

比例环节的对数幅频特性表达式为

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K \tag{5-17}$$

这是一条平行于横轴、高度为 $20\lg K$ 的直线。当 $K>1$ 时，$L(\omega)>0\mathrm{dB}$，直线位于 ω 轴的上方；当 $0<K<1$ 时，$L(\omega)<0\mathrm{dB}$，直线位于 ω 轴的下方。

对数相频特性即 $\phi(\omega)$ 曲线可根据式(5-16)作出，它是一条与横轴重合的直线。比例环节的伯德图如图 5.7 所示。

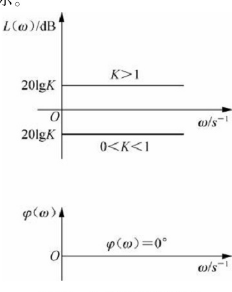


图 5.7　比例环节的伯德图

5.2.2 积分环节

传递函数 $G(s)=\frac{1}{s}$

频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ (5-18)

幅频特性 $A(\omega)=\frac{1}{\omega}$ (5-19)

相频特性 $\phi(\omega)=-90^\circ$ (5-20)

1. 奈氏图

由式(5-19)可见，积分环节的幅相频率特性 $A(\omega)$ 与频率 ω 成反比，而相频特性 $\phi(\omega)$ 恒为 -90°。按照奈氏图绘制方法绘制积分环节的幅相频率特性如图5.8所示，它是一条与负虚轴重合的直线。

2. 伯德图

积分环节的对数幅频特性表达式为

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{1}{\omega}=-20\lg\omega \tag{5-21}$$

由式(5-21)可知，当 $\omega=1$ 时，$L(\omega)=0\mathrm{dB}$；$\omega=10$ 时，$L(\omega)=-20\mathrm{dB}$，表示对数幅频特性曲线是一条斜率为 $-20\mathrm{dB/dec}$ 的直线。据式(5-20)可作积分环节的相频特性曲线，它是一条平行于 ω 轴的直线，纵坐标为 -90°。积分环节的伯德图如图5.9所示。

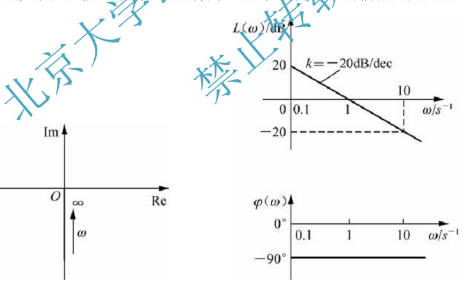


图5.8 积分环节的奈氏图

图5.9 积分环节的伯德图

5.2.3 微分环节

传递函数 $G(s)=s$

频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega$ (5-22)

幅频特性 $A(\omega)=\omega$ (5-23)

相频特性 $$\phi(\omega)=90^\circ \tag{5-24}$$

1. 奈氏图

由式(5-23)可知，微分环节的幅频特性的大小与 ω 成正比，而相频特性始终为90°。因此，其幅相频率特性如图5.10所示，它是一条与正虚轴重合的直线。

2. 伯德图

微分环节的对数幅频特性表达式为

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\omega \tag{5-25}$$

由式(5-25)知，当 $\omega=1$ 时，$L(\omega)=0$，当 $\omega=10$ 时，$L(\omega)=20\text{dB}$，即微分环节的对数幅频特性是斜率为20dB/dec、穿过 $\omega=1$ 的直线。据式(5-24)知，其相频特性是一条平行于 ω 轴的水平直线，纵坐标为90°，如图5.11所示。

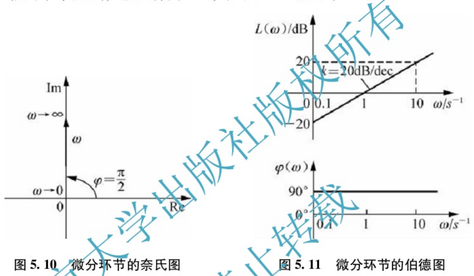


图5.10 微分环节的奈氏图　　图5.11 微分环节的伯德图

对比微分环节和积分环节的对数幅频特性曲线与对数相频特性曲线可知，它们关于 ω 轴镜像对称。

5.2.4 惯性环节

传递函数 $$G(s)=\frac{1}{1+Ts}$$

频率特性 $$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T} \tag{5-26}$$

幅频特性 $$A(\omega)=\frac{1}{|1+\mathrm{j}\omega T|}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \tag{5-27}$$

相频特性 $$\phi(\omega)=\angle\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}=-\arctan\omega T \tag{5-28}$$

1. 奈氏图

由式(5-27)和式(5-28)可知，当 $\omega=0$ 时，幅值 $A(\omega)=1$，相角 $\phi(\omega)=0^\circ$；当 $\omega=1/T$ 时，幅值 $A(\omega)=1/\sqrt{2}$，相角 $\phi(\omega)=-45^\circ$；当 $\omega\to\infty$ 时，幅值 $A(\omega)=0$，相角 $\phi(\omega)=-90^\circ$。当 ω 由0变化到 ∞ 时，则可绘制出其幅相频率特性曲线，如图5.12所示。

可以证明，惯性环节的幅相频率特性曲线是以点(1/2，j0)为圆心，以 1/2 为半径，位于第Ⅳ象限的半圆。

2. 伯德图

惯性环节的对数幅频特性表达式为

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

$$=-20\lg\sqrt{1+(\omega T)^2} \qquad (5-29)$$

当 $\omega \ll 1/T$ 时，$(\omega T)^2 \ll 1$，$L(\omega)\approx 20\lg 1 = 0\text{dB}$。表明 $\omega<1/T$ 频段的渐近线是一条高度为 0dB 的水平线。

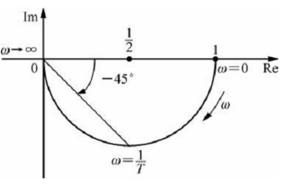


图 5.12 惯性环节的奈氏图

当 $\omega \gg 1/T$ 时，$(\omega T)^2 \gg 1$，$L(\omega)\approx 20\lg\frac{1}{\omega T}=-20\lg\omega T$。表明 $\omega>1/T$ 频段的渐近线是一条斜率为 -20dB/dec 的直线。两条渐近线在频率 $\omega=1/T$ 处相交，称该频率为转折频率，如图 5.13 所示。

将转折频率 $\omega_0=1/T$ 代入式(5-29)和式(5-28)，可得转折点处的精确值为

$$\begin{cases}L(\omega_0)=-20\lg\sqrt{2}=-3\text{dB}\\ \phi(\omega_0)=-\arctan 1=-45°\end{cases}$$

这说明采用渐近线表示对数幅频特性，在转折频率及其附近会出现一些误差。最大误差发生在转折频率 $\omega=1/T$ 处，其值为 -3dB。由于误差不大，故对系统做近似分析时，常用渐近线近似代替精确曲线，这样可使工作量大大减少。

根据式(5-28)，可求出一些特殊点处 $\phi(\omega)$ 的值：$\omega=0$ 时，$\phi(\omega)=0°$；$\omega=1/T$ 时，$\phi(\omega)=-45°$；$\omega\to\infty$ 时，$\phi(\omega)=-90°$。也可以根据需要，再选择并计算出其他的一些点，然后用平滑曲线将它们连接起来，便可得到近似的对数相频特性曲线，如图 5.13 所示。

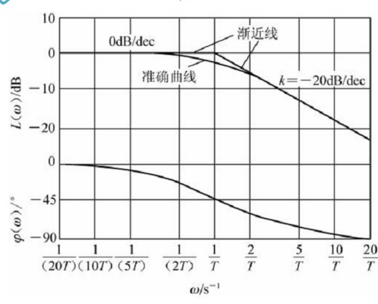


图 5.13 惯性环节的伯德图

5.2.5 一阶微分环节

传递函数 $$G(s)=1+Ts$$

频率特性 $$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=1+\mathrm{j}\omega T \tag{5-30}$$

幅频特性 $$A(\omega)=\sqrt{1+(\omega T)^2} \tag{5-31}$$

相频特性 $$\phi(\omega)=\angle(1+\mathrm{j}\omega T)=\arctan\omega T \tag{5-32}$$

1. 奈氏图

由式(5-30)可知，当 $\omega=0\to\infty$ 变化时，奈氏图的实部始终是1，而虚部则随 ω 线性增大到∞。即奈氏图由点(1，j0)线性增大到(1，j∞)。因此，一阶微分环节的奈氏图是一条平行于虚轴的直线，如图5.14所示。

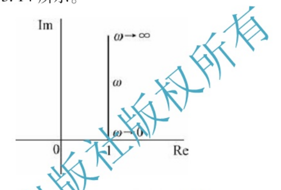


图5.14 一阶微分环节的奈氏图

2. 伯德图

一阶微分环节对数幅频特性表达式为

$$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2} \tag{5-33}$$

一阶微分环节频率特性是惯性环节频率特性的倒数，两者的对数幅频特性关于0dB线对称，两者的对数相频特性关于0°线对称，如图5.15所示。

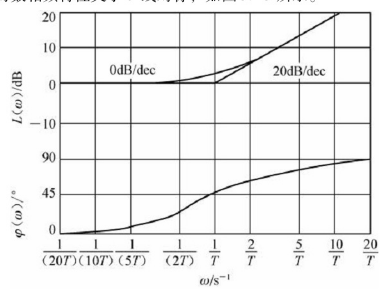


图5.15 一阶微分环节伯德图

5.2.6 振荡环节

传递函数
$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

频率特性
$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_n j\omega+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2+j2\xi\omega_n\omega} \tag{5-34}$$

幅频特性
$$A(\omega)=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+(2\xi\omega_n\omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(\frac{2\xi\omega}{\omega_n})^2}} \tag{5-35}$$

相频特性
$$\phi(\omega)=-\arctan\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2} \tag{5-36}$$

1. 奈氏图

由式(5-34)和式(5-35)取特殊点：

$\omega=0$ 时，$A(\omega)=1$，$\phi(\omega)=0°$，特性曲线为正实轴上一点(1，j0)。

$\omega=\omega_n$ 时，$A(\omega)=1/2\xi$，$\phi(\omega)=-90°$，特性曲线与负虚轴相交，且 ξ 值越小，幅值越大，曲线与虚轴的交点离原点越远。

$\omega\to\infty$ 时，$A(\omega)\to 0$，$\phi(\omega)\to -180°$，即特性曲线沿负实轴方向趋向原点。

还可根据需要，再选择并计算出其他若干点，然后将所有选取的点用平滑曲线连接起来，振荡环节的幅相特性近似图形如图5.16所示。由于除了 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 外，其他点的 $A(\omega)$ 都于 ξ 有关，所以不同的 ξ 对应于不同的幅相特性曲线，振荡环节的幅相特性曲线是与 ξ 有关的一簇曲线。

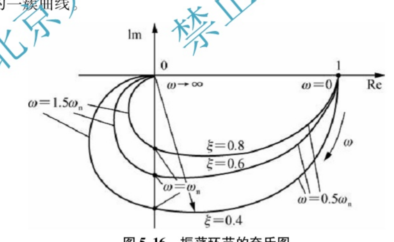


图5.16 振荡环节的奈氏图

2. 伯德图

振荡环节的对数幅频特性
$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{5-37}$$

(1) 当 $\omega \ll \omega_n$ 时（低频段），略去式(5－37)中的$\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$和$\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$项，得

$$L(\omega) \approx 20\lg 1 = 0\text{dB}$$

这表示 $L(\omega)$ 的低频渐近线是一条 0dB 的水平线。此时的相位由式(5－36)算出，近似为 $\phi(\omega) = 0°$。

(2) 当 $\omega \gg \omega_n$ 时（高频段），略去式(5－37)中的 1 和$\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$项，得

$$L(\omega) \approx -20\lg\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40\lg\frac{\omega}{\omega_n}$$

此时的相位为 $\phi(\omega) \approx -180°$。

上式表明，振荡环节对数幅频特性曲线的高频段渐近线是一条斜率为 －40dB/dec 的直线。$\omega = \omega_n$ 为两条渐近线的交点，ω_n 称为振荡环节的转折频率。对数相频特性曲线的高频段渐近线是一条 －180°的水平线

振荡环节的精确对数幅频特性曲线随着 ξ 值的不同而不同，当 ξ 较小时，对数幅频特性曲线出现了峰值，称为谐振峰值 M_r，对应的频率称为谐振频率 ω_r，其求解过程如下：

令$\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0$，解之得谐振频率

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 0.707) \tag{5－38}$$

由 $M_r = A(\omega_r)$，可得谐振峰值

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{5－39}$$

图 5.17 中示出了不同 ξ 值时，对应的幅频特性的精确曲线及其渐近线。由图可见，它们之间存在一定的误差，此误差与 ξ 值有关。

由式(5－38)和式(5－39)可知，当 $\xi < 0.707$ 时，$\omega_r > 0$，出现峰值，ξ 越小，ω_r 和 M_r 越大。当 $\xi = 0$ 时，$\omega_r = \omega_n$，M_r 为无穷大，表明外加正弦信号的频率与振荡环节的自然振荡频率相同，产生共振。当 $\xi > 0.707$ 时，不会产生谐振，系统单调衰减。当 $\xi = 0.707$ 时，$\omega_r = 0$，$M_r = 1$，称为二阶最佳。

振荡环节的对数相频特性曲线可根据式(5－36)计算一些特殊点：$\omega = 0$ 时，$\phi(\omega) = 0°$；$\omega = \omega_n$ 时，$\phi(\omega) = -90°$；$\omega \to \infty$ 时，$\phi(\omega) = -180°$。

也可以根据需要，再选择并计算出其他的一些点，将这些点用平滑曲线连接起来，便可得到振荡环节的近似对数相频特性曲线，如图 5.17 所示，它也是因 ξ 值不同而异。

5.2.7 时滞环节

传递函数 $$G(s) = \mathrm{e}^{-\tau s}$$

频率特性 $$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)} \tag{5－40}$$

幅频特性 $$A(\omega) = 1 \tag{5－41}$$

相频特性 $$\phi(\omega) = -\tau\omega(\text{弧度}) \tag{5－42}$$

1. 奈氏图

由式(5－41)和式(5－42)可知，时滞(延迟)环节的幅频值恒为 1，与 ω 无关，而其

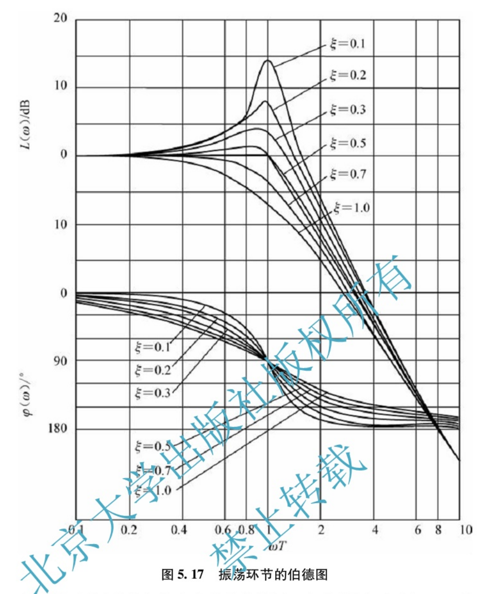


图 5.17 振荡环节的伯德图

相位则与 ω 成比例，因此它的幅相频率特性曲线是一个单位圆，如图 5.18 所示。

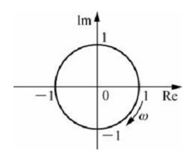


图 5.18 时滞环节奈氏图

2. 伯德图

时滞环节的对数幅频特性和对数相频特性表达式为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg 1 = 0\text{dB} \\ \phi(\omega) = -57.3 \times \tau\omega(°) \end{cases} \tag{5-43}$$



由此可绘制出当 $\omega=0\to\infty$ 变化时时滞环节的伯德图，如图 5.19 所示。可以看出，其对数幅频特性是 0dB 线，而对数相频特性随 ω 的增大线性滞后，且 τ 越大，相角滞后就越大，这对于系统的稳定性是很不利的。

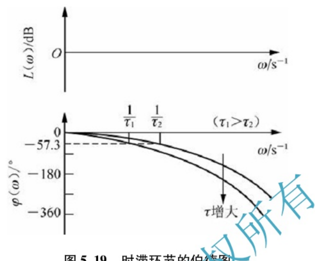


图 5.19　时滞环节的伯德图

5.3　控制系统开环频率特性

频率特性的最大优点是可以根据系统的开环频率特性曲线分析系统的闭环性能，这样可以简化分析过程，因此绘制系统的开环频率特性曲线就显得尤为重要。

5.3.1　系统开环幅相频率特性曲线

系统的传递函数可看作由典型环节串联而成，一般可表示为

$$G(s)=\frac{K\prod_{j=0}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=0}^{n-\nu}(T_i s+1)}\quad(n>m)\tag{5-44}$$

频率特性

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K\prod_{j=0}^{m}(\tau_j\mathrm{j}\omega+1)}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}\prod_{i=0}^{n-\nu}(T_i\mathrm{j}\omega+1)}\tag{5-45}$$

其中 τ_j、T_i 为时间常数；n 为系统的阶次；ν 为积分环节的个数，代表系统的型别；K 为开环增益。根据系统开环频率特性的一般表达式，可求幅频特性和相频特性的一般表达式

$$A(\omega)=\frac{K\prod_{j=0}^{m}\sqrt{1+(\omega\tau_j)^2}}{(\omega)^{\nu}\prod_{i=0}^{n-\nu}\sqrt{1+(\omega T_i)^2}}\tag{5-46}$$

$$\phi(\omega)=-\nu90^{\circ}+\sum_{j=0}^{m}\arctan\omega\tau_j-\sum_{i=0}^{n-\nu}\arctan\omega T_i\tag{5-47}$$

明显看出，在 $\omega \to 0$ 时，$G(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$\lim_{\omega \to 0} G(\mathrm{j}\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}} = \lim_{\omega \to 0} \frac{K}{\omega^{\nu}} \cdot \angle -\nu \frac{\pi}{2} \tag{5-48}$$

只决定于系统开环增益 K 和积分环节数目 ν，而与惯性、振荡、微分等环节无关。ν 值不同，$G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线的起始段有很大差别，如图 5.20(a) 所示。

当然，如果开环传递函数中有串联的非最小相位环节，则情况又将有所不同。

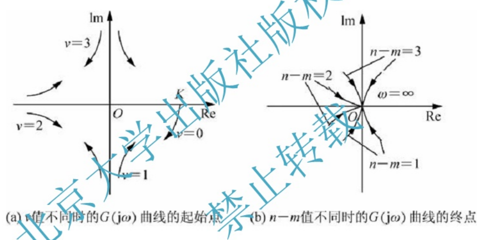
再看另一端，在 $\omega \to \infty$ 时，$G(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$\lim_{\omega \to \infty} G(\mathrm{j}\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{K \prod_{j=0}^{m} \tau_j}{(\mathrm{j}\omega)^{n-m} \prod_{i=0}^{n-\nu} T_i} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{K \prod_{j=0}^{m} \tau_j}{\omega^{n-m} \prod_{i=0}^{n-\nu} T_i} \cdot \angle -(n-m) \frac{\pi}{2}$$

对控制系统而言，$n > m$，故有

$$\lim_{\omega \to \infty} G(\mathrm{j}\omega) = 0 \cdot \angle -(n-m) \frac{\pi}{2} \tag{5-49}$$

说明 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线以确定的角度收敛于复平面的坐标原点，如图 5.20(b) 所示。



(a) ν值不同时的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线的起始点　(b) $n-m$ 值不同时的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线的终点

图 5.20　奈氏图的起点和终点

在确定曲线的起始点和终点后，再根据需要选取并算得若干其他特殊点，如奈氏图与虚轴、负实轴的交点等。然后将所有这些点用平滑曲线连接起来，便可得到系统的开环奈氏图。

【例 5-1】 已知系统的开环传递函数 $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)(0.1s+1)}$，试绘制系统的奈氏图。

解： 该系统开环频率特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{10}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan\omega - \arctan 0.1\omega \end{cases}$$

系统为 0 型系统，$n-m=2$，因此，奈氏图起始于 $(10,\ \mathrm{j}0)$ 点，以 $-180°$ 终止于原点。

奈氏图与虚轴的交点可由 $\phi(\omega) = 270°$（即 $-90°$）得到，即

$$-\arctan\omega - \arctan 0.1\omega = -90°$$

$$\arctan\frac{1.1\omega}{1-0.1\omega^2}=90°$$

两边取正切得$\frac{1.1\omega}{1-0.1\omega^2}=+\infty$。因此，由$1-0.1\omega^2=0$得，$\omega^2=10$，则

$$A(\omega)=\frac{10}{\sqrt{1+10}\sqrt{1+0.01\times 10}}\approx 2.87$$

故奈氏图与虚轴的交点为$(0,\ -\mathrm{j}2.87)$。系统的奈氏图如图5.21所示。

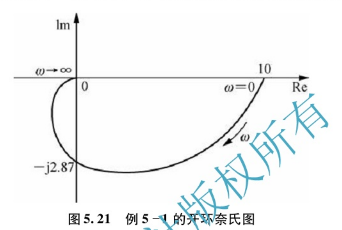


图5.21　例5－1的开环奈氏图

【例5－2】　设系统的开环传递函数为$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(2s+1)}$，试绘制其奈氏图。

解：该传递函数的幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{cases}A(\omega)=\dfrac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2}}\\ \phi(\omega)=-90°-\arctan\omega-\arctan 2\omega\end{cases}$$

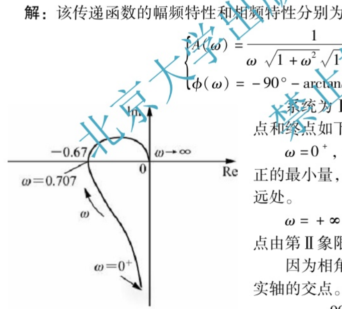


图5.22　例5－2的开环奈氏图

系统为Ⅰ型系统，且$n-m=3$，故其奈氏图起点和终点如下：

$\omega=0^+$，$A(\omega)=+\infty$，$\phi(\omega)=-90°-\Delta$，Δ为正的最小量，故起点在第Ⅲ象限，负虚轴方向无穷远处。

$\omega=+\infty$，$A(\omega)=0$，$\phi(\omega)=-270°+\Delta$，故终点由第Ⅱ象限趋向于原点$(0,\ \mathrm{j}0)$。

因为相角从$-90°$变化到$-270°$，所以必有与负实轴的交点。由$\phi(\omega)=-180°$得

$$-90°-\arctan\omega-\arctan 2\omega=-180°$$

即

$$\arctan 2\omega=90°-\arctan\omega$$

上式两边取正切，得$2\omega=1/\omega$，即$\omega=0.707$，此时$A(\omega)=0.67$。因此，奈氏图与负实轴的交点为$(-0.67,\ \mathrm{j}0)$。其奈氏图如图5.22所示。

5.3.2 开环对数频率特性曲线

控制系统的开环传递函数是由多个典型环节串联构成的，即

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)$$

其中 n 为环节的个数。

系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}G_i(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)e^{j\phi_i(\omega)} \tag{5-50}$$

系统的对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n}20\lg A_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n}L_i(\omega) \tag{5-51}$$

系统的对数相频特性为

$$\phi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(\omega) \tag{5-52}$$

据以上分析可知，由多个典型环节串联构成的系统开环特性，经对数化处理后，其幅频和相频均转化为各典型环节相应特性的线性叠加，因此可得出绘制系统开环对数频率特性曲线的一般步骤：

（1）将开环传递函数写成典型环节乘积的形式。

（2）画出各环节的伯德图。

（3）在同一个横坐标下，分别将各环节的对数幅频曲线以及相频曲线相加，即可求得系统的开环对数频率特性曲线。

【例5-3】 设某系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{(1+s)(1+10s)}$，试绘制其伯德图。

解： 系统可看作由三个典型环节串联，即

放大环节

$$G_1(s)=K$$

惯性环节

$$G_2(s)=\frac{1}{s+1},\quad G_3(s)=\frac{1}{10s+1}$$

画出各环节的伯德图，如图5.23中的虚线所示。将各环节的对数幅频和相频曲线分别相加，得到系统开环对数幅频曲线和相频曲线，如图5.23中的实线所示。

实际上，在熟悉了对数幅频特性的性质之后，不必先一一画出各环节的特性，再相加，而是可以采用更简便的方法。由式(5-46)可知，当 ω 很小(低频段)时，有 $A(\omega)\approx\dfrac{K}{\omega^{\nu}}$，即低频段的对数幅频特性可近似表示为

$$L(\omega)\approx 20\lg K-20\lg\omega^{\nu} \tag{5-53}$$

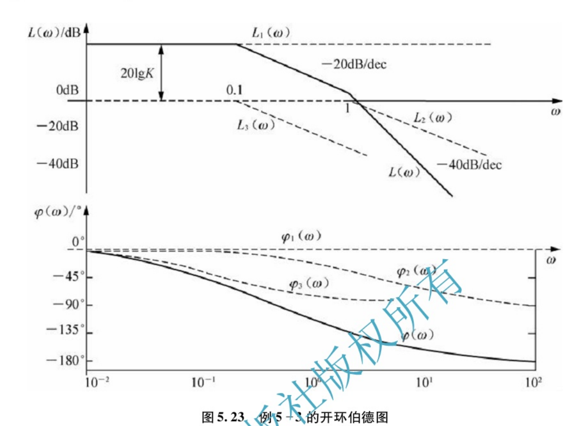


图 5.23 例 5-3 的开环伯德图

由式(5-53)知，低频段的斜率为 -20νdB/dec；在 $\omega=1$ 处，低频段(当第一个转折频率小于1时，为其延长线)的高度为 $20\lg K$。因此，实际的作图过程可简化为：

(1) 将开环传递函数标准化，即写成式(5-44)的形式(尾项为1的形式)。

(2) 求出各典型环节的转折频率，将其从小到大排列为 ω_1，ω_2，ω_3，…并标注在 ω 轴上。

(3) 绘制低频段渐近线(ω_1 左侧的部分)。过 $\omega=1$，$L(\omega)=20\lg K$ 做斜率为 -20dB/dec的直线段，直到遇到 ω_1 为止。

(4) 从低频渐近线开始，随着 ω 的增加，每到一个典型环节的转折频率处，就根据该环节的特性改变一次渐近线的斜率，从而画出对数幅频特性的渐近线；必要时可利用渐近线和精确曲线的误差表，对交接频率附近的曲线进行修正，以求得更准确的曲线。

(5) 根据系统的开环对数相频特性的表达式，画出对数相频特性的近似曲线。

应该注意的是，当系统的多个环节具有相同的转折频率时，该转折频率点处斜率的变化应为各个环节对应的斜率变化值的代数和。

【例 5-4】 设Ⅰ型系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(1+Ts)}$，试绘制系统的伯德图。

解： 系统有一个转折频率 $\omega=1/T$。

Ⅰ型系统的低频段斜率为 -20dB/dec，过 $\omega=1$，$L(\omega)=20\lg K$ 做斜率为 -20dB/dec 的直线段到 $\omega=1/T$ 处；之后是一惯性环节，所以在交接频率 $\omega=1/T$ 处，幅频特性的斜率由 -20dB/dec 变为 -40dB/dec，系统的伯德图如图 5.24 所示。

工程实际中，一般只需了解相频特性曲线的大致变化趋势，但 $L(\omega)$ 线与 0dB 线交点

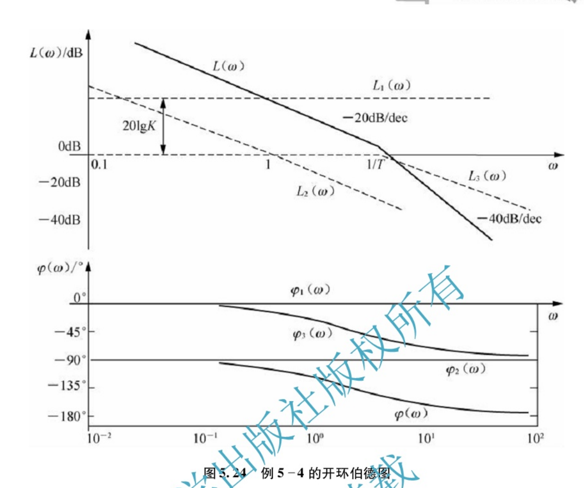


图 5.24 例 5－4 的开环伯德图

ω_c 处的相角 $\phi(\omega_c)$ 却对系统性能有重要影响，ω_c 称为穿越频率(或称剪切频率，又称截止频率)。

【例 5－5】 已知系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{2000s-4000}{s^2(s+1)(s^2+10s+400)}$$

试绘制系统开环对数幅频特性曲线。

解：(1) 将开环传递函数写成标准形式

$$G(s)H(s)=\frac{-10\left(1-\frac{s}{2}\right)}{s^2(s+1)\left(\frac{s^2}{20^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{20}+1\right)}$$

开环系统由六个典型环节串联而成：非最小相位比例环节、两个积分环节、非最小相位一阶微分环节、惯性环节和振荡环节。

(2) 确定各交接频率 ω_i，$i=1$、2、3 及斜率变化值。

惯性环节： $\omega_1=1$，斜率减小 20dB/dec

一阶微分环节：$\omega_2=2$，斜率增加 20dB/dec（非最小相位）

振荡环节： $\omega_3=20$，斜率减小 40dB/dec

最小交接频率 $\omega_{\min}=\omega_1=1$。

(3) 绘制低频段($\omega<\omega_{\min}$)渐近特性曲线。因为 $\nu=2$，则低频渐近线斜率为 -40dB/

dec，过点(1，20)做斜率为 -40dB/dec 的直线。

(4) 绘制频段 $\omega \geqslant \omega_{min}$ 渐近特性曲线，k 为渐近线斜率：$\omega_{min} \leqslant \omega < \omega_2$，$k = -60$dB/dec；$\omega_2 \leqslant \omega < \omega_3$，$k = -40$dB/dec；$\omega \geqslant \omega_3$，$k = -80$dB/dec。

系统开环对数幅频渐近特性曲线如图 5.25 所示。

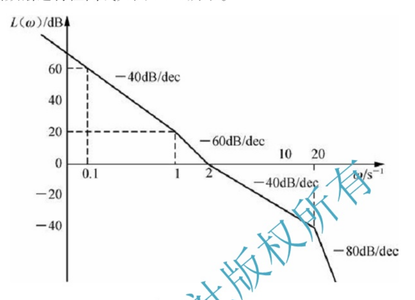


图 5.25　系统开环对数幅频渐近特性曲线

【思考题】　如何求解典型环节交接频率?

5.4　实验法确定系统传递函数

工程上有时需要用实验的方法来确定系统的数学模型，例如，在第 2 章中介绍的时域中的阶跃响应法。在频域中也可以通过实验方法来确定系统的传递函数。频率实验法一般分为两步完成：首先利用频谱仪或仪器测量出控制系统在正弦输入信号作用下的频率响应(开环或闭环)，并画出系统的伯德图；然后再对该伯德图中的特性曲线进行分析和处理，确定系统所包含的各个典型环节，从而建立起被测系统的开环传递函数或闭环传递函数。

若已知某线性系统是稳定的，则可用实验法获得其伯德图，具体做法如下：

(1) 在规定的频率范围内，给被测系统施加不同频率的正弦信号，并相应地测量出系统的稳态输出幅值和相位值，据此作出系统的对数幅频特性和相频特性曲线。

(2) 用斜率为 0dB/dec、±20dB/dec、±40dB/dec 等整数倍的直线段来逼近测量到的对数幅频特性曲线，得到系统的对数幅频特性曲线的渐近线。

对一系统实测得到的频率特性曲线用图 5.26 中的细线表示，近似后得到的渐近线如粗线所示。

设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K\prod_{j=0}^{m}(\tau_j s + 1)}{s^{\nu}\prod_{i=0}^{n-\nu}(T_i s + 1)}$$

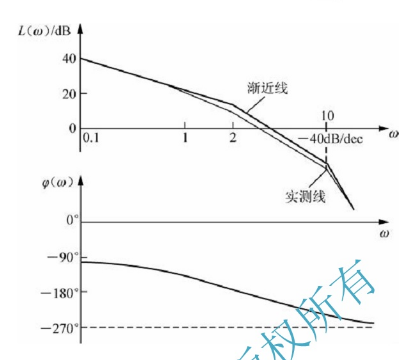


图 5.26 用实验方法获得伯德图

式中 ν 为积分环节个数。则当 ω 很小(低频段)时，有 $A(\omega)\approx\frac{K}{\omega^{\nu}}$，低频段的对数幅频特性可近似表示为

$$L(\omega)\approx 20\lg K-20\lg\omega^{\nu}$$

由此可求出系统增益 K。

当 $\nu=0$ 时，系统的低频渐近线是一条幅值为 $20\lg K$dB 的水平线，设其高度为 x，则

$$L(\omega)=20\lg K$$

$$K=10^{\frac{x}{20}}$$

当 $\nu>0$ 时，系统伯德图低频段的斜率为 -20νdB/dec，它(或其延长线)与横轴的交点频率为 ω_0，图 5.27 为 $\nu=1$ 时的系统伯德图。

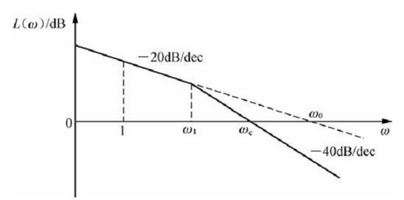


图 5.27 $\nu=1$ 时的系统伯德图

当 $\omega=\omega_0$ 时，$20\lg\frac{K}{\omega_0^{\nu}}=0$，得 $K=\omega_0^{\nu}$。



【例 5 -6】 已知某系统开环对数幅频特性如图 5.28 所示，试求系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$。

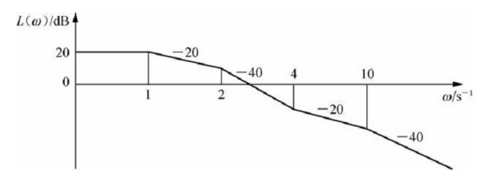


图 5.28 例 5 -6 系统的伯德图

解：（1）由低频段确定开环增益 K 和系统型别 v。由图可以看出，该系统为 0 型系统，即 $v=0$；故比例环节的 K 值可以由式 $20\lg K=20$ 求得，$K=10$。

（2）由转折频率确定典型环节。由图可以求得各转折频率为 $\omega_1=1\text{s}^{-1}$，$\omega_2=2\text{s}^{-1}$，$\omega_3=4\text{s}^{-1}$，$\omega_4=10\text{s}^{-1}$。

当 $\omega>\omega_1=1\text{s}^{-1}$时，对数幅频特性曲线的斜率为 -20dB/dec，说明这是一个一阶惯性环节，其传递函数为

$$G_2(s)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_1}s+1}=\frac{1}{s+1}$$

当 $\omega>\omega_2=2s^{-1}$时，对数幅频特性曲线的斜率为 -40dB/dec，曲线在原来的斜率 -20dB/dec 的基础上又下降 20dB/dec，说明这也是一个一阶惯性环节，其传递函数为

$$G_3(s)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_2}s+1}=\frac{1}{0.5s+1}$$

当 $\omega>\omega_3=4s^{-1}$时，对数幅频特性曲线的斜率又变为 -20dB/dec，说明有一个 $+20\text{dB/dec}$ 的曲线与之叠加，是一个一阶微分环节，其传递函数为

$$G_4(s)=\frac{1}{\omega_3}s+1=\frac{1}{4}s+1=0.25s+1$$

当 $\omega=\omega_4=10s^{-1}$时，对数幅频特性曲线的斜率又变为 -40dB/dec，说明又有一个惯性环节与之叠加，其传递函数为

$$G_5(s)=\frac{1}{\frac{1}{\omega_4}s+1}=\frac{1}{0.1s+1}$$

综上可得该系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)=\frac{10(0.25s+1)}{(s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

【例 5 -7】 由实测数据做出系统的伯德图如图 5.29 所示，试求系统的传递函数。

解：由伯德图可知，该系统为最小相位系统，转折频率分别为 $\omega_1=0.5$，$\omega_2=2$。

（1）低频段斜率为 -40dB/dec，说明有两个积分环节，$\nu=2$。

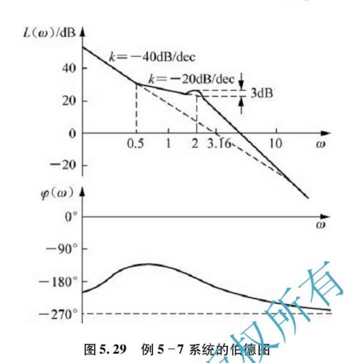


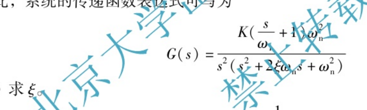
图 5.29　例 5－7 系统的伯德图

（2）$\omega_0=3.16$，由此可求出 $K=\omega_0^2=3.16^2\approx10$。

（3）由于 ω_1 后斜率由 −40dB/dec 变化为 −20dB/dec，则系统有一个一阶微分环节。

（4）由于 ω_2 后斜率由 −20dB/dec 变化为 −60dB/dec，且出现峰值 3dB，则有一个振荡环节，其固有振荡频率 $\omega_n=\omega_2=2$。

因此，系统的传递函数表达式可写为



$$G(s)=\frac{K\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\omega_n^2}{s^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

（5）求 ξ。

由 $20\lg M_r=3dB$ 得 $M_r=1.41$；由 $M_r=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=1.41$，解出 $\xi=0.38$。

（6）将上述计算的各参数代入 $G(s)$ 表达式中可得系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{10(2s+1)2^2}{s^2(s^2+2\times0.38\times2s+2^2)}=\frac{10(2s+1)}{s^2(0.25s^2+0.38s+1)}$$

【思考题】　和解析法相比较，实验法求取系统的传递函数有哪些优点？

5.5　频率特性法分析系统稳定性

根据系统开环频率特性来判别闭环系统的稳定性，并进而确定稳定系统的相对稳定性，是控制工程中一种极为重要而实用的方法。

由于闭环系统稳定的充要条件是特征方程的所有根（闭环极点）都具有负实部，即都位于 S 左半平面，因此运用开环频率特性讨论闭环系统的稳定性，首先应明确开环频率特性和闭环特征式的关系，并进而找出和闭环特征根性质之间的规律性。

5.5.1 开环频率特性和闭环特征方程的关系

一个闭环系统的典型结构如图 5.30 所示，其闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

设

$$G(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \tag{5-54}$$

则

$$\Phi(s)=\frac{M(s)/N(s)}{1+M(s)/N(s)}=\frac{M(s)}{N(s)+M(s)} \tag{5-55}$$

式中 $N(s)+M(s)$ 为闭环特征式。

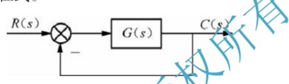


图 5.30 闭环控制系统的动态结构图

取辅助函数 $F(s)$，并令

$$F(s)=1+G(s) \tag{5-56}$$

将式(5-54)代入，可得

$$F(s)=1+\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{N(s)+M(s)}{N(s)}=\frac{D(s)}{N(s)} \tag{5-57}$$

式中 $N(s)$和 $D(s)$分别为系统开环和闭环特征式。

由式(5-57)可知，$F(s)$的分子为系统的闭环特征式，$F(s)$的分母为系统的开环特征式。对于一个实际的系统，开环传递函数 $G(s)H(s)$分母的阶次总是高于分子的阶次，所以系统闭环特征式的阶次与开环特征方程的阶次相同，即 $D(s)$与 $N(s)$根的个数相等。

在式(5-57)中，以 $\mathrm{j}\omega$ 代替 s，可得

$$F(\mathrm{j}\omega)=1+G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{N(\mathrm{j}\omega)+M(\mathrm{j}\omega)}{N(\mathrm{j}\omega)}=\frac{D(\mathrm{j}\omega)}{N(\mathrm{j}\omega)} \tag{5-58}$$

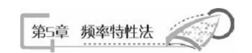
式(5-58)确定了系统开环频率特性和闭环频率特性的关系。

5.5.2 相角变化量和系统稳定性的关系

式(5-58)可以写成如下形式

$$F(\mathrm{j}\omega)=1+G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=K\frac{(\mathrm{j}\omega-s_1)\cdots(\mathrm{j}\omega-s_n)}{(\mathrm{j}\omega-p_1)\cdots(\mathrm{j}\omega-p_n)}=K\frac{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{j}\omega-s_i)}{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{j}\omega-p_i)} \tag{5-59}$$

式中 s_i 为系统闭环极点，p_i 为系统开环极点，而 K 为闭环和开环特征式最高阶项系数之比。



当 ω 变化时，分子、分母向量的模值和幅角也将随之改变。考虑复数相乘(除)，幅角相加(减)。那么，当 ω 由 $0\to+\infty$ 时，$1+G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 向量的幅角变化量为

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}[1+G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)]=\sum_{i=1}^{n}\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}(\mathrm{j}\omega-s_i)-\sum_{i=1}^{n}\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}(\mathrm{j}\omega-p_i) \quad (5-60)$$

式（5－60）中各子项$(\mathrm{j}\omega-s_i)$、$(\mathrm{j}\omega-p_i)$的幅角增量，取决于特征根在复平面的位置。不同性质的子因式幅角变化如图 5.31 所示。

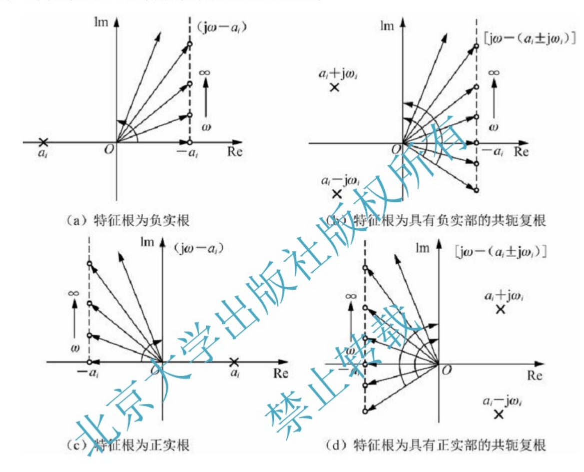


图 5.31 不同性质的子因式幅角变化

图 5.31(a)中特征根 a_i 为负实根，那么当 ω 由 $0\to+\infty$ 时，向量$(\mathrm{j}\omega-a_i)$逆时针旋转 90°，则有

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}(\mathrm{j}\omega-a_i)=\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}(\mathrm{j}\omega+|a_i|)=\frac{\pi}{2} \quad (5-61)$$

图 5.31(b)中特征根 $a_i\pm\mathrm{j}\omega_i$ 为负实部共轭复根，则有

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}[\mathrm{j}\omega-(a_i+\mathrm{j}\omega_i)]+\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}[\mathrm{j}\omega-(a_i-\mathrm{j}\omega_i)]=2\cdot\frac{\pi}{2} \quad (5-62)$$

图 5.31(c)中特征根 a_i 为正实根，那么当 ω 由 $0\to+\infty$ 时，向量$(\mathrm{j}\omega-a_i)$逆时针旋转 90°，即

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}(\mathrm{j}\omega-a_i)+\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}[\mathrm{j}\omega+(-a_i)]=-\frac{\pi}{2} \quad (5-63)$$

图 5.31(d)中特征根 $a_i\pm\mathrm{j}\omega_i$ 为正实部共轭复根，则有

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}[\mathrm{j}\omega-(a_i+\mathrm{j}\omega_i)]+\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}[\mathrm{j}\omega-(a_i-\mathrm{j}\omega_i)]=-2\cdot\frac{\pi}{2} \tag{5-64}$$

总之，特征根的实部为负(不论是实根，还是共轭复根)，各子因式的幅角增量平均为 $+\frac{\pi}{2}$；而特征根的实部为正(即不稳定根)时，各子因式的幅角增量平均为 $-\frac{\pi}{2}$。

设系统阶次为 n，则 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的分子、分母均为 n 阶，其相角变量为

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}F(\mathrm{j}\omega)=\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}D(\mathrm{j}\omega)-\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}N(\mathrm{j}\omega) \tag{5-65}$$

如果系统开环是稳定的，而且闭环也稳定，则

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}N(\mathrm{j}\omega)=n\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\ \underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}D(\mathrm{j}\omega)=n\cdot\frac{\pi}{2}$$

因此式(5-64)必然有

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}F(\mathrm{j}\omega)=0$$

上述分析说明，系统开环传递函数中不稳定极点的个数为0，则系统闭环稳定的充要条件是：当 ω 由 $0\to+\infty$ 时，$F(\mathrm{j}\omega)$ 曲线绕原点的周数为0。

由此可以推理，如果系统开环传递函数中有 p 个不稳定极点，$n-p$ 个稳定极点，则

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}N(\mathrm{j}\omega)=(n-p)\cdot\frac{\pi}{2}-p\cdot\frac{\pi}{2}=(n-2p)\cdot\frac{\pi}{2}$$

设系统闭环稳定，则有

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}D(\mathrm{j}\omega)=n\cdot\frac{\pi}{2}$$

由式(5-64)知，此时必有

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}F(\mathrm{j}\omega)=\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}D(\mathrm{j}\omega)-\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}N(\mathrm{j}\omega)=n\cdot\frac{\pi}{2}-(n-2p)\cdot\frac{\pi}{2}=p\pi$$

由此可见，如果系统开环传递函数中有 p 个不稳定极点，当 ω 由 $0\to+\infty$ 时，则闭环系统稳定的充要条件是，$F(\mathrm{j}\omega)$ 在复平面中的幅角增量为 $p\pi$，即 $F(\mathrm{j}\omega)$ 曲线逆时针绕原点 $\frac{p}{2}$ 周。

5.5.3 奈奎斯特稳定判据

奈奎斯特稳定判据（以下简称奈氏稳定判据）是一种利用开环频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 来判别闭环系统稳定性的方法。

考虑到 $F(\mathrm{j}\omega)=1+G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$（即 $F(\mathrm{j}\omega)$ 平面，简称 F 平面）的原点相当于 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 平面(简称 GH 平面)的点$(-1,\ \mathrm{j}0)$，如图5.32所示。故奈氏稳定判据可描述为：若开环传递函数中有 p 个不稳定极点，闭环系统稳定的充要条件是，当 ω 由 $0\to+\infty$ 时，系统开环幅相频率特性曲线 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 逆时针绕点$(-1,\ \mathrm{j}0)$的周数为 $N=\frac{p}{2}$，即转过 $p\pi$。否则，系统闭环不稳定。

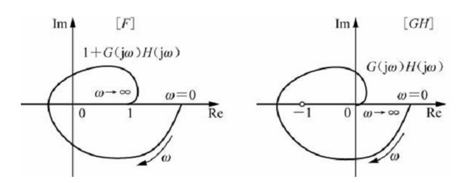


图5.32 $F(\mathrm{j}\omega)$与$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$之间的关系

【例5-8】 已知五个系统的$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$曲线如图5.33所示，其中$p$为开环不稳定极点的个数，试判断系统的稳定性。

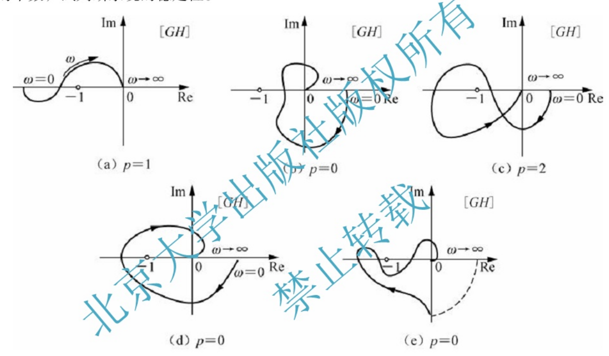


图5.33 稳定性分析示意图

解： 图5.33(a)中，$p=1$，而曲线对点$(-1, \mathrm{j}0)$的相角变化为$-180°$，所以系统不稳定。

图5.33(b)中，$p=0$，曲线没有环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$，也即对点$(-1, \mathrm{j}0)$的相角变化为$0°$，系统稳定。

图5.33(c)中，$p=2$，曲线逆时针环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$一周，即$360°$，系统稳定。

图5.33(d)中，$p=0$，而曲线顺时针环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$一周，即$-360°$，系统不稳定。

图5.33(e)中，$p=0$，曲线顺时针环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$半周，逆时针环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$半周，相角变化为0，所以系统稳定。

需要说明的是，由于在前述奈氏稳定判据的推证中，开环传递函数的极点的实部只有为正或为负两种情况，但如果开环传递函数$G(s)H(s)$中含有积分环，即包含有为零的极点，则需对其幅相频率特性曲线进行修正后，才能使用奈氏稳定判据来判断系统的稳定性。

将零根 s 看作稳定根。当 ω 由 $0\to\infty$ 时，稳定根所对应的子因式的相角增量为 $90°$，而零根所构成的子因式的相角增量为

$$\underset{\omega:0\to\infty}{\Delta\angle}(j\omega-0)=90°-90°=0°$$

为使二者的相角增量一致，假设零根的子因式$(j\omega-0)$从正实轴 $\omega=0$ 处开始，以无穷小的半径 ε 逆时针转 $90°$后，至虚轴上 $\omega=0^+$ 处，然后再随 ω 的增加沿虚轴趋于∞，如图 5.34 所示。这样处理之后，当 ω 由 $0\to\infty$ 变化时，零根与稳定根的子因式便具有同样的相角增量。也就是说，将零根处理成了稳定根。

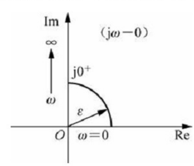


图 5.34　$j\omega-0$ 曲线

由于零根 s 处在 $G(s)H(s)$的分母上，故上述处理相当于在 $\omega=0$ 处给幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$补画了一半径无穷大，顺时针转 $90°$的大圆弧，至 $\omega=0^+$ 处。若 $G(s)H(s)$中有 ν 个积分环节，则此大圆弧的转角为 $\nu\cdot90°$。因此，若开环传递函数 $G(s)H(s)$ 中有 ν 个积分环节，则应先绘出 $\omega=0^+\to\infty$ 的幅相频率特性曲线，然后从 $\omega=0$ 开始顺时针方向补画一个半径为无穷大，相角为 $\nu\cdot90°$的大圆弧至 $\omega=0^+$ 处，再根据奈氏稳定判据判断系统的稳定性。

【例 5-9】　系统的奈氏曲线如图 5.35 所示，ν 为积分环节的个数，p 为不稳定根的个数。试用奈氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。

解：图 5.35（a）、（b）、（c）中 $p=0$，因为经过修正起点后的奈氏曲线都不包围点$(-1,\ j0)$，所以系统都是稳定的。图 5.35（d）中的奈氏图经对起点修正后，对点$(-1,\ j0)$的相角变化量恰好为 $p\cdot180°$，所以系统也是稳定的。

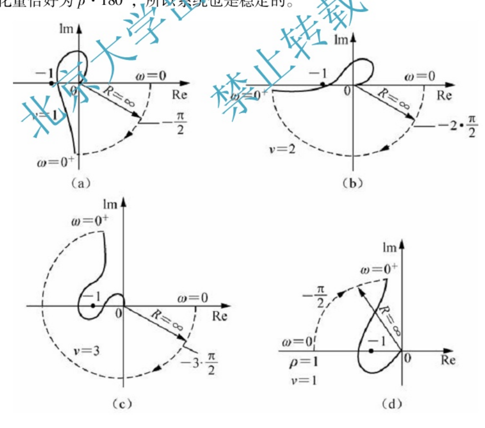


图 5.35　例 5-9 中各系统的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线

【例 5-10】 若系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(Ts-1)}$，试用奈氏稳定判据判定系统的闭环稳定性。

解： 系统开环频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega T-1)}$$

幅频特性为

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

此为Ⅰ型系统，当 $\omega>0^+$ 后，相频特性为

$$\phi(\omega)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega T}{-1}。$$

当 $\omega=0^+$ 时，$\phi(0^+)=-90^\circ-(180^\circ-0^\circ)=-270^\circ$；

当 $\omega=\infty$ 时，$\phi(\infty)=-90^\circ-(180^\circ-90^\circ)=-180^\circ$。

先按作图法作出奈氏曲线。由于该系统有一个积分环节($\nu=1$)，故将曲线的起点逆时针修正 90°，并补画 $\omega=0\to0^+$ 曲线，修正后的奈氏曲线如图 5.36 所示。

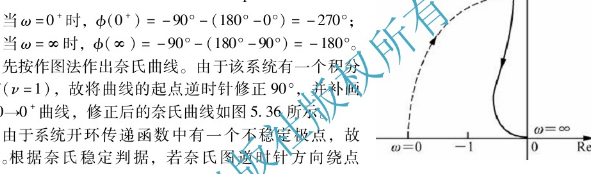


图 5.36 例 5-10 系统的奈氏图

由于系统开环传递函数中有一个不稳定极点，故 $p=1$。根据奈氏稳定判据，若奈氏图逆时针方向绕点$(-1, \mathrm{j}0)$的周数 $N=\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$，则系统闭环稳定。但实际上曲线是顺时针方向绕过点$(-1, \mathrm{j}0)$半周，因此系统闭环不稳定。

5. 奈氏稳定判据的物理意义

前面从理论上分析了在频率域内利用开环传递函数判断闭环系统稳定性的原理。可以看出，在 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 平面上的点$(-1, \mathrm{j}0)$对稳定性有着特殊的意义，如同根平面上的虚轴。

对于绝大多数工业控制系统，开环都是稳定的，因此，针对开环稳定系统可以得到如下结论：

(1) $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$不包围点$(-1, \mathrm{j}0)$，闭环稳定，闭环极点全部在 S 左半平面；

(2) $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$包围点$(-1, \mathrm{j}0)$，闭环不稳定，$S$ 右半平面有闭环极点；

(3) $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$通过点$(-1, \mathrm{j}0)$，闭环临界稳定，在虚轴上存在闭环极点；

(4) $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$穿过点$(-1, \mathrm{j}0)$时，$\omega=\omega_n$，恰好满足方程 $G(\mathrm{j}\omega_n)H(\mathrm{j}\omega_n)=-1$，即有 $|G(\mathrm{j}\omega_n)H(\mathrm{j}\omega_n)|=1$，$\angle G(\mathrm{j}\omega_n)H(\mathrm{j}\omega_n)=-180^\circ$。可求解出一对虚根 $\pm\mathrm{j}\omega_n$。此时说明输出和输入的幅值比为 1，相位差为 -180°，这类似于振荡器的自激振荡情况。

【例 5-11】 某一系统的开环传递函数如下

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}$$

(1) 试确定开环放大倍数 K 和临界值 K_c 与时间常数的关系。

(2) 令 $T=2$，K 取不同值（$K<1.5$，$K=1.5$，$K>1.5$）作图，用奈氏稳定判据分析系统的稳定性。

解：（1）由传递函数可得系统的开环频率特性

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega T+1)(\mathrm{j}\omega+1)}=\frac{K}{-\omega^2(T+1)+\mathrm{j}(\omega-\omega^3 T)}$$

设系统临界稳定时 $\omega=\omega_c$，此时

$$A(\omega)\big|_{\omega=\omega_c}=\frac{K_c}{\omega_c\sqrt{1+(\omega_c T)^2}\times\sqrt{1+\omega_c^2}}=1$$

$$\phi(\omega)\big|_{\omega=\omega_c}=-\arctan\frac{1-\omega_c^2 T}{-\omega_c(1+T)}=-180°$$

从相角条件解出，$\omega_c^2 T=1$，$\omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{T}}$，把 ω_c 代入幅值条件，解出$\dfrac{K_c T}{1+T}=1$，$K_c=\dfrac{1+T}{T}$。

因此，使闭环系统稳定的条件是：$0<K<K_c$。

（2）设 $T=2$，则 $K_c=1.5$。对于 $K<1.5$，$K=1.5$，$K>1.5$，系统奈氏图如图 5.37 所示。

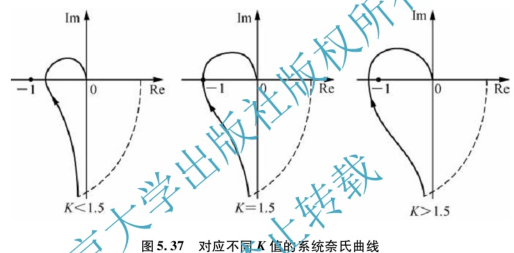


图 5.37　对应不同 K 值的系统奈氏曲线

当 $K<1.5$ 时，曲线不包围点$(-1,\ \mathrm{j}0)$，系统闭环稳定。当 $K=1.5$ 时，曲线穿过点$(-1,\ \mathrm{j}0)$，当 $T=2$ 时，$\omega_0=0.707$，系统存在两个共轭虚根，$s_{1,2}=\pm \mathrm{j}0.707$，闭环系统临界稳定。

当 $K>1.5$ 时，曲线顺时针包围点$(-1,\ \mathrm{j}0)$两次，系统存在两个实部为正的闭环极点，因此系统不稳定。

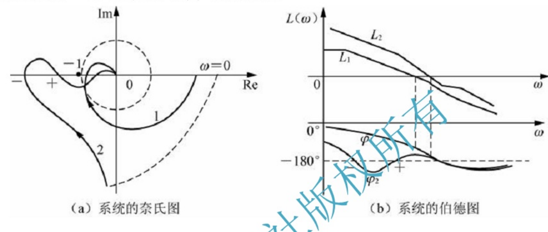
5.5.4　对数频率稳定判据

由奈氏图知，若系统开环稳定$(p=0)$，则 ω 由 $0\to\infty$ 变化时，开环传递函数 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$曲线绕点$(-1,\ \mathrm{j}0)$的转角为 0，系统闭环稳定。从图 5.38(a)可以看出，系统 1、2 均满足条件，故两个系统闭环稳定。

由图中可以看出，$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$曲线绕点$(-1,\ \mathrm{j}0)$的转角为 0，相当于 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$曲线不包围点$(-1,\ \mathrm{j}0)$；也相当于不穿越负实轴上$(-1,\ \mathrm{j}0)$点以左的区段(如系统 1)，或者在该区段的正穿越(由上向下，即沿相角增加的方向穿越)次数与负穿越(由下向上，即相角减小的方向穿越)次数相等(如系统 2)。因此，奈氏稳定判据还有一个非常实用的表述：设 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$曲线对负实轴上点$(-1,\ \mathrm{j}0)$至 $-\infty$ 区段的正穿越次数为 N_+，负穿越次数为 N_-，则正负穿越次数之差 $N=N_+-N_-=p/2$ 是系统闭环稳定的充要条件。

若 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线起始或终止于负实轴上点$(-1, j0)$点至 $-\infty$ 区段，则算作 1/2 次穿越。

这种方法也可用于对数频率特性图上，如图 5.38(b)所示。系统开环频率特性的奈氏图(极坐标图)和伯德图之间对应关系为：在奈氏图上点$(-1, j0)$的左侧，对应对数幅频特性图中 $L(\omega)>0$ 的区段。奈氏图上的负实轴对应于相频特性的 $-180°$线。$G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线沿相角增加方向从上向下穿越负实轴(正穿越)，对应相频特性曲线沿相角增加方向从下往上穿过 $-180°$线(正穿越)，反之亦然。



(a) 系统的奈氏图　　(b) 系统的伯德图

图 5.38　系统的奈氏图与伯德图的对应关系

因此，对数频率稳定判据：在 $L(\omega)\geq 0$ 的频段内，相频特性 $\phi(\omega)$ 穿越 $-180°$线的正、负穿越次数之差为 $p/2$，则系统稳定。

【例 5-12】　系统开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，试用对数稳定判据判断系统的闭环稳定性。

解：伯德图如图 5.39 所示。

图 5.39　例 5-12 的伯德图

此系统的开环传递函数在 S 右半平面没有极点，即 $p=0$，而在 $L(\omega)\geqslant 0$ 的频段内，相频特性 $\phi(\omega)$ 不穿越 $-180°$线，故闭环系统稳定。

5.5.5　系统的相对稳定性及稳定裕度

对于自动控制系统来说，一般为最小相位系统，其开环不稳定极点数 $p=0$，因此可以根据奈氏稳定判据来判断闭环系统的稳定性，主要是看曲线是否环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$，若 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 曲线不环绕点$(-1, \mathrm{j}0)$，则系统稳定。显然，$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 曲线离点$(-1, \mathrm{j}0)$越远，则闭环系统的稳定程度越高；反之，$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 离点$(-1, \mathrm{j}0)$越近，则闭环系统的稳定程度越低；如果 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 穿过点$(-1, \mathrm{j}0)$，则意味着闭环系统处于临界稳定状态。这便是通常说的相对稳定性，它通过 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$ 对点$(-1, \mathrm{j}0)$的靠近程度来衡量，其定量指标为相角裕度 γ 和幅值裕度 K_g，如图 5.40 所示。

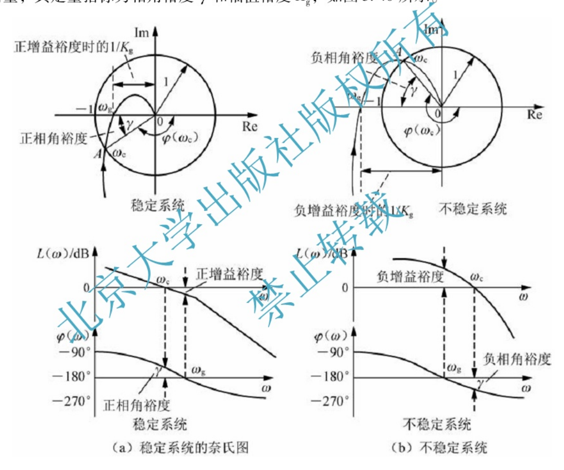


图 5.40　相角裕度和幅值裕度

1. 相角裕度 γ

对应于 $|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=1$ 的角频率 ω_c 称为剪切频率，或穿越频率，也称截止频率。在 ω_c 处，相频特性距 $-180°$ 线的相位差 γ 称为相角裕度。在奈氏图上，γ 为 $|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=1$ 处的矢量与负实轴之间的夹角；在对数频率特性曲线上，γ 相当于 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)|=0$ 处的相频曲线与 $-180°$线之间的差值，其算式为

$$\gamma=\phi(\omega_c)-(-180°)=\phi(\omega_c)+180° \tag{5-66}$$

可见，相位裕度是指在穿越频率 ω_c 处，使系统达到临界稳定状态尚可附加的相角滞后量。不难理解，$\gamma>0°$，如图 5.40(a)，表示奈氏图不包围点(-1，j0)，相应的闭环系统稳定；反之，$\gamma<0°$，如图 5.40(b)，相应的闭环系统不稳定。一般地，γ 越大，系统的相对稳定性越好。

2. 幅值裕度 K_g

幅值裕度 K_g 是指开环频率特性的相角 $\phi(\omega_g)=-180°$时，在对应频率 ω_g 处，开环频率特性的幅值 $|G(j\omega)H(j\omega)|$ 的倒数。其算式为

$$K_g=\frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}=\frac{1}{A(\omega_g)} \tag{5-67}$$

在伯德图上，幅值裕度以 dB 表示，相当于 $\phi(\omega_g)=-180°$时，幅频值 $20\lg A(\omega_g)$ 的负值，即

$$20\lg K_g=20\lg\frac{1}{A(\omega_g)}=-20\lg A(\omega_g)\ \text{dB} \tag{5-68}$$

对于最小相位系统，幅值裕度表示在 ω_g 处，若系统的开环增益增加到当前增益的 K_g 倍，则闭环系统处于临界稳定状态。因此，幅值裕度又称增益裕度。

由奈氏稳定判据知，对于最小相位系统，其闭环稳定的充要条件是奈氏图不包围点(-1，j0)，即 $|G(j\omega)H(j\omega)|<1$，对应的 $K_g>1$，如图 5.40(a)所示。一般，K_g 越大，说明系统的相对稳定性越好；反之，当 $K_g<1$ 时，对应的系统不稳定，如图 5.40(b)所示。

工程上，一般要求幅值裕度大于 6dB。

保持适当的稳定裕度，可以预防系统中元件性能变化可能带来的不利影响。为使系统有满意的稳定储备，以及得到较满意的暂态响应，在工程实践中，通常要求$\gamma=30°\sim60°$，$20\lg K_g\geqslant10\text{dB}$，即 $K_g\geqslant3$。

前面已经指出，对于最小相位系统，开环幅频特性和相频特性之间存在唯一的对应关系。上述相角裕度意味着，系统开环对数幅频特性在剪切频率 ω_c 处的斜率应大于 -40dB/dec,在实际中通常取值 -20dB/dec。

【例 5-13】 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

(1) 当 $K=5$ 时，绘制出系统的开环对数幅频特性曲线，并求出剪切频率 ω_c 和相角裕度 γ。

(2) 求出系统处于临界稳定状态时的 K 值。

解：(1) 首先绘制 $K=5$ 时系统的开环对数幅频特性曲线。当 $K=5$ 时，有 $20\lg K=14\text{dB}$。在 ω 轴上标出各典型环节的转折频率，即两个惯性环节的转折频率分别为 $\omega_1=1\text{rad/s}$ 和$\omega_2=10\text{rad/s}$。在图中 $\omega_1=1\text{rad/s}$ 处标出 $L(1)=14\text{dB}$，过此点绘制一条斜率为 -20dB/dec 的直线，它就是低频段的渐近线。然后随着 ω 的增加，在各转折频率处依次改变斜率，直接绘制出开环对数幅频特性曲线的渐近线。在 $\omega_1=1\text{rad/s}$ 处，斜率由 -20dB/dec变为 -40dB/dec；在 $\omega_2=10\text{rad/s}$ 处，斜率由 -40dB/dec 变为 -60dB/dec。系统的开环对数幅频特性曲线如图 5.41 所示。

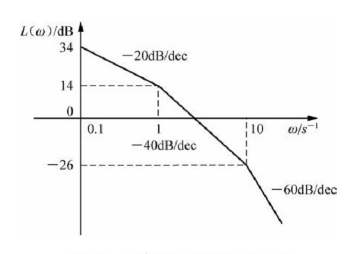


图 5.41　系统开环对数幅频特性曲线

下面确定剪切频率 ω_c。由图 5.41 可知，$20\lg A(\omega)=0$，即

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega_c\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{0.01\omega^2+1}}=1$$

因 $1\text{rad/s}<\omega_c<10\text{rad/s}$，有 $A(\omega)\approx\frac{K}{\omega_c\omega_c}=1$，求出剪切频率为 $\omega_c=2.24\text{rad/s}$，对应相角裕度为

$\gamma=180°+\phi(\omega_c)=180°-90°-\arctan2.24\times1-\arctan2.24\times0.1\approx11.5°$。

(2) 当系统处于临界状态时，$\phi(\omega_g)=-180°$，即

$$\begin{aligned}\phi(\omega_g)&=-90°-\arctan\omega_g-\arctan0.1\omega_g\\&=-180°\end{aligned}$$

用试探法求出 $\omega_g=3.1\text{rad/s}$。当 $\omega_g=3.1\text{rad/s}$ 时的幅值为

$$A(3.1)=\frac{5}{3.1\sqrt{3.1^2+1}\times\sqrt{(3.1\times0.1)^2+1}}\approx0.473$$

因此，幅值裕度 $K_g=\frac{1}{0.473}\approx2.112$。

由上式可知，若开环放大系数放大 2.112 倍，即 $K=5\times2.112=10.56$，则系统处于临界稳定状态。

【例 5－14】 已知某单位反馈的最小相位系统，其开环对数幅频特性曲线如图 5.42 所示，试求开环传递函数，计算稳定裕度。

解： 由图可知，该系统为Ⅱ型系统，由两个积分环节、一个一阶微分环节、两个惯性环节组成。两个转折频率分别为 $\omega_1=1$ 和 $\omega_2=10$，可以写出系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(0.1s+1)^2}$$

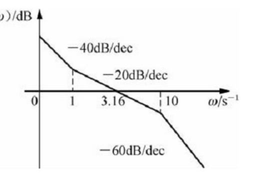


图 5.42　例 5－14 系统开环伯德图

因为 $1<\omega_c<10$，所以有 $A(\omega_c)\approx\frac{K\omega_c}{\omega_c^2}=1$，$K=\omega_c=3.16s^{-1}$，故系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{3.16(s+1)}{s^2(0.1s+1)^2}$$

由相角裕度的定义公式有

$$\gamma=180°+\phi(\omega_c)=180°-180°-2\arctan0.1\omega_c+\arctan\omega_c$$

将 $\omega_c=3.16s^{-1}$ 代入，得 $\gamma\approx37.4°$。

令

$$\phi(\omega_g)=-180°-2\arctan0.1\omega_g+\arctan\omega_g=-180°$$

解之得

$$\omega_g = 8.9s^{-1}$$

因为 $1 < \omega_g < 10$，所以幅值裕度为

$$20\lg K_g = -20\lg A(\omega_g) \approx -20\lg \frac{K\omega_g}{\omega_g^2} = 9\ \text{dB}$$

因为 $\gamma > 0$、$20\lg K_g > 0$，所以该闭环系统是稳定的。

5.6 频率特性与系统性能的关系

对于单位负反馈系统来说，其开、闭环传递函数之间的关系为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

系统的动态结构及所有参数，唯一地取决于开环传递函数 $G(s)$。在第 3 章的时域分析中，系统的性能指标 $\sigma\%$、t_s 和 e_{ss} 等比较直观地表达了系统的动态响应。那么，频率特性与这些时域指标之间有没有关系，能否直接由系统的开环频率特性来判断系统的动态响应？本节将对这一问题进行讨论。

5.6.1 开环频率特性与闭环系统性能的关系

由前述的奈氏稳定判据知，稳定系统的开环幅相特性频率 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线距离点 $(-1, \mathrm{j}0)$ 的远近，反映了系统的稳定程度，即系统动态过程的平稳性。而 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线靠近点 $(-1, \mathrm{j}0)$ 的部位，相当于系统开环对数幅频特性曲线 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$ 和 0dB 线交点附近的区段。交点处的频率 ω_c 称之为截止频率，因此可以说 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$ 在 ω_c 附近的特性，对闭环系统的 $\sigma\%$ 和 t_s 起着主要的作用，如图 5.43 所示，这一区段称作开环频率特性的中频段。

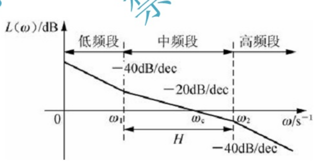


图 5.43 系统开环对数幅频特性图

由时域分析法知，时域指标中的 e_{ss}，主要取决于系统开环传递函数中的积分环节的数目 ν 和开环增益 K，这反映在开环对数幅频曲线的低频段。

为了分析问题方便，通常将开环对数频率特性曲线分为低、中、高三个频段，下面介绍“三频段”的概念。

1．低频段

低频段通常是指开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 在第一个转折频率以前的区段。这一区段的特性完全由积分环节和开环增益决定。积分环节的个数(型别)确定了低频段的斜率，

开环增益确定了曲线的高度。而系统的型别和开环增益又与系统的稳态误差有关，所以低频段反映了系统的稳态性能。

设低频段对应的传递函数可近似表示为

$$G(s)=\frac{K}{s^{v}} \tag{5-69}$$

对应的频率特性可表示为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}}$$

对数幅频特性为

$$L(\omega)=20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|=20\lg K-\nu\cdot 20\lg\omega \tag{5-70}$$

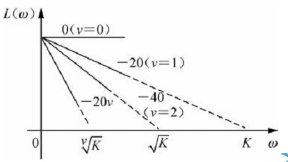


图 5.44　低频段幅频特性曲线

ν 为不同值时，低频段对数幅频曲线的形状分别如图 5.44 所示，为斜率不同的一些直线，斜率值为 -20ν。

由式(5-70)可知，低频渐近线(或其延长线)在 $\omega=1$ 处的纵坐标为 $20\lg K$；从数值上看，低频渐近线(或其延长线)与 0dB 线的交点频率 ω_0 和开环增益 K 的关系为

$$K=\omega^{\nu} \quad 或 \quad \omega=\sqrt[\nu]{K} \tag{5-71}$$

可见，对数幅频特性曲线的位置越高，说明开环增益 K 越大；低频渐近线的斜率越负，说明积分环节数目越多；均表明系统稳态性能越好。

2. 中频段

中频段是指开环对数幅频特性曲线 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$ 在截止频率 ω_c 附近(或 0dB 附近)的区段。这一区段对系统的动态性能影响很大，它反映了系统动态响应的平稳性和快速性。

设系统开环对数幅频特性曲线中频段斜率为 −20dB/dec，且占据的频率区间较宽，如图 5.45(a)，则只从平稳性和快速性考虑，该段可近似认为是一条斜率为 −20dB/dec 的直线，对应的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s}=\frac{\omega_c}{s} \tag{5-72}$$

对于单位负反馈系统，闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{1}{\frac{1}{\omega_c}s+1} \tag{5-73}$$

这相当于一阶系统，时间常数 $T=\frac{1}{\omega_c}$。其阶跃响应单调上升、无超调量、稳定裕量足够，即 $\gamma>0°$。调节时间为

$$t_s=(3\sim4)T=\frac{3\sim4}{\omega_c} \tag{5-74}$$

可见，在一定条件下，ω_c 越大，t_s 就越小，响应速度也越快。因此，截止频率和调节时间一样，反映了系统响应的快速性。

如果 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$ 曲线中频段斜率为 $-40\mathrm{dB/dec}$，且占据的频率区间较宽，如图5.45(b)所示，则只从平稳性和快速性考虑，该段可近似认为是一条斜率为 $-40\mathrm{dB/dec}$ 的直线，对应的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s^2}=\frac{\omega_c^2}{s^2} \tag{5-75}$$

对于单位负反馈系统，闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\omega_c^2}{s^2+\omega_c^2} \tag{5-76}$$

式（5-76）中含有一对共轭纯虚根 $\pm\mathrm{j}\omega_c$，相当于无阻尼二阶系统。系统处于临界稳定状态，阶跃响应为等幅振荡。

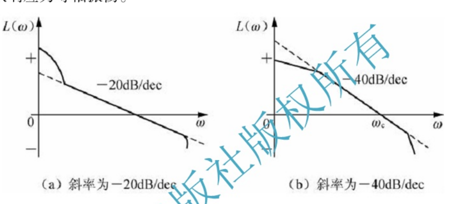


图5.45 中频段幅频特性曲线

所以，如果中频段的斜率为 $-40\mathrm{dB/dec}$，则所占频带不能过宽，否则系统的稳定性将难以满足要求。若中频段斜率更负，闭环系统将难以稳定。故一般取中频段斜率为 $-20\mathrm{dB/dec}$，以期待得到良好的平稳性，而以提高 ω_c 来保证要求的快速性。

3. 高频段

高频段是指开环对数幅频特性 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$ 曲线在中频段 $(\omega>\omega_c)$ 以后的区段。这部分特性是由系统中时间常数很小、频带很高的部件决定的。由于远离 ω_c，一般分贝值又很低，故对系统的动态响应影响不大，近似分析时可以只保留1、2个部件特性的作用，而将其他高频部件当作放大环节处理。

然而，从系统抗干扰的角度看，高频段特性是有其意义的。由于高频部位开环幅频一般较低，即 $20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|\ll0$，$|G(\mathrm{j}\omega)|\ll1$，故对单位反馈控制系统有

$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{|G(\mathrm{j}\omega)|}{|1+G(\mathrm{j}\omega)|}\approx G(\mathrm{j}\omega) \tag{5-77}$$

闭环幅频特性近似等于开环幅频特性，相当于反馈不起作用。

因此，开环幅频特性高频段的幅值，直接反映了系统对输入端高频干扰信号的抑制能力。这部分特性的分贝值越低，系统抗干扰能力越强。

【思考题】 1. Bode 图上的低频段、中频段和高频段是如何划分的，它们与系统的性能有何关系。

2. 在 Bode 图中，系统的快速性和平稳是如何体现的?

5.6.2 开环频率特性与动态性能的关系

使用开环频率特性分析系统的动态性能时，常把相角裕度 γ 和截止频率 ω_c 两个特征量作为依据，这就是开环频域指标。考虑到系统的动态性能由超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 来描述时具有直观和准确的优点，为了能使用开环频率特性来评价系统的动态性能，必须首先找出开环频域指标与时域指标的关系。事实上，频域指标和系统的动态性能指标之间存在着确切的或近似的关系，因而频域指标是表征系统动态性能的间接指标。

1. 二阶系统

典型二阶系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\xi\omega_n)}$$

幅频特性为

$$A(\omega)=\frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\xi\omega_n)^2}} \tag{5-78}$$

相频特性为

$$\phi(\omega)=-90°-\arctan\frac{\omega}{2\xi\omega_n} \tag{5-79}$$

二阶系统的开环对数频率特性曲线如图 5.46 所示。在时域分析法中，二阶系统的性能指标主要是用 $\sigma\%$ 来衡量系统的平稳性，用调节时间 t_s 来衡量系统的快速性。而在频率法中，常用相角裕度 γ 来衡量系统的平稳性，用穿越频率 ω_c 来反映系统的快速性。下面来分析它们之间的关系。

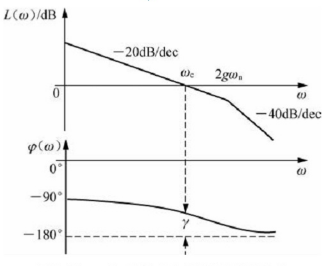


图 5.46 二阶系统开环对数频率特性曲线

1）相角裕度 γ 与超调量 $\sigma\%$ 之间的关系

将 ω_c 代入式(5-78)，并考虑到 $A(\omega_c)=1$，可得

$$A(\omega_c) = \frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + (2\xi\omega_n)^2}} = 1$$

即 $\omega_c^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$。解此方程并取正值得

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \tag{5-80}$$

相角裕度

$$\gamma = 180° + \phi(\omega_c) = 180° - 90° - \arctan\frac{\omega_c}{2\xi\omega_n}$$

$$= \arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_c} = \arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}} \tag{5-81}$$

可见，相角裕度 γ 与系统阻尼比 ξ 有关，它们之间的关系曲线如图 5.47 所示。从曲线可知，ξ 越大，则 γ 越大，系统的稳定性越好。当 $0 < \xi < 0.707$ 时，可近似地视为 ξ 每增加 0.1，γ 增加 10°，即

$$\gamma(\omega_c) = 100\xi \tag{5-82}$$

在时域分析法中，超调量 $\sigma\%$ 和 ξ 的关系为

$$\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$$

可将 $\sigma\%$ 和 ξ 之间的关系用曲线表示，如图 5.47 所示。根据以上分析可知，相角裕度 γ 越大，超调量 $\sigma\%$ 越小；反之亦然。

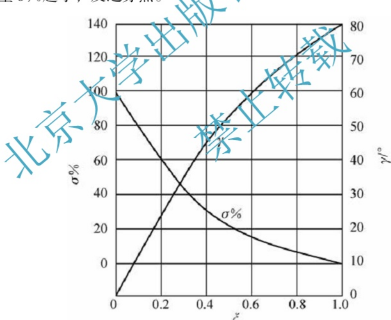


图 5.47　γ 与 ξ 之间、ξ 与 σ% 之间的关系曲线

2）ω_c、γ 与 t_s 之间的关系

根据时域分析的结果知，$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$。将式(5-80)代入得

$$t_s \cdot \omega_c = \frac{3\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}{\xi}$$

将式(5 -81)代入该式得

$$t_s \cdot \omega_c = \frac{6}{\tan\gamma} \tag{5-83}$$

由以上分析可知，调节时间 t_s 与 ω_c 及 γ 有关。在 γ 不变时，穿越频率 ω_c 越大，调节时间 t_s 越短。

2. 高阶系统

对于一般的三阶以上的高阶系统，要准确地导出开环频域特征量与时域指标关系是困难的，并且使用起来也不方便，实用意义不大。在控制工程的分析与设计中，通常采用下述两个近似公式来进行频域指标与时域指标间的估算。

$$\sigma\% = [0.16 + 0.4(\frac{1}{\sin\gamma}) - 1] \times 100\% \quad (35° \leqslant \gamma \leqslant 90°) \tag{5-84}$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}\left[2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right] \quad (35° \leqslant \gamma \leqslant 90°) \tag{5-85}$$

由式（5 -84）和式（5 -85）可见，随着 γ 的增大，高阶系统的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 都将减小。

【例 5 -15】 某最小相位系统开环对数幅频特性渐近线如图 5.48 所示，已知 ω_c 位于两个转折频率的几何中心，试估算系统的稳态精度、超调量和调节时间。

解： 根据图 5.48 可以确定，系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.2s+1)}$$

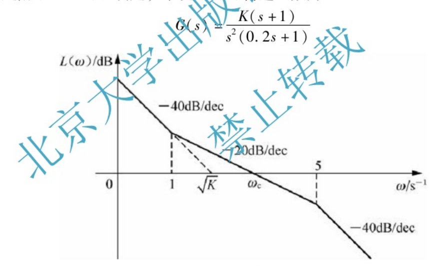


图 5.48 控制系统开环伯德图

由题意得 $\omega_c = \sqrt{1 \times 5} \approx 2.24 s^{-1}$。

$$L(\omega_c) = 20\lg\frac{K \cdot \omega_c}{\omega_{c2}} = 0$$

$$\frac{K}{\omega_c} = 1$$

解出 $K = \omega_c \approx 2.24 s^{-1}$。

从低频段渐近线的斜率知该系统为Ⅱ型，系统的静态位置、静态速度和静态加速度误差分别为

$$K_p = \infty, \quad K_v = \infty, \quad K_a = K = 2.24$$

系统跟踪阶跃信号和斜坡信号的稳态误差均为零；跟踪单位加速度信号的稳态误差为

$$e_{ssr}=\frac{1}{K_a}=\frac{1}{2.24}\approx 0.45$$

本系统为三阶系统，当 $K=2.24$ 时，可计算出闭环极点为

$$s_{1,2}=-1.38\pm 1.76j,\ s_3=-2.24$$

可见，s_3 和 $s_{1,2}$ 比较接近，不存在闭环主导点，故按高阶系统估算超调量和调节时间。

系统的相角裕度为 $\gamma=\arctan\omega_c-\arctan 0.2\omega_c\approx 41.81°$。

闭环谐振峰值为 $M_r=\frac{1}{\sin\gamma}=\frac{1}{\sin 41.81°}=1.5$。

超调量为 $\sigma\%=[0.16+0.4(M_r-1)]\times 100\%=[0.16+0.4(1.5-1)]\times 100\%=36\%$。

调整时间为 $t_s=\frac{K\pi}{\omega_c}$，其中 $K=2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2$。

代入 M_r、ω_c 后求得 $t_s=4.74\text{s}$。

【思考题】 为什么说高频段决定了系统的抗干扰能力？

5.7 利用 MATLAB 进行频域分析

用 MATLAB 可以画出频率特性的精确图形，也可方便地求取系统的稳定裕度，这将大大有助于对系统的分析和设计。

5.7.1 频率特性图的绘制

设系统的传递函数为 $G(s)=\frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$，num(s)和 den(s)分别为传递函数分子多项式和分母多项式（均以 s 的降幂排列），通过函数调用，可画出两种频率特性图。

1. 伯德图

调用函数 bode(num, den)可在同一幅图中，分上、下两部分生成幅频特性(以 dB 为单位)和相频特性(以 rad 为单位)。其中，num 和 den 分别为分子、分母多项式系数向量。本函数没有明确给出频率 ω 的范围，MATLAB 能在系统频率响应的范围内自动选取 ω 值绘图。

若要具体地给出频率 ω 的范围，则可以用函数

```
w=logspace(m, n, npts); bode(num, den, w);
```

来绘制系统伯德图。其中 w=logspace(m, n, npts)用来产生频率自变量的采样点。即在十进制数 10^m 和 10^n 之间，产生 ntps 个用十进制对数分度的等距离点。采样点 ntps 的具体值由用户确定。

若需指定幅值范围和相角范围，则需按以下形式调用

```
[mag, phase, w] =bode(num, den)
```

此时，生成的幅值 mag 和相角值 phase 为列矢量，并且相角以度为单位，幅值不以 dB 为单位。

或者采用调用形式：

```
[mag, phase] =bode(num, den, w)
```

此时，在定义的频率 w 范围内，生成的幅值和相角值为列矢量，并且幅值不以 dB 为单位。



利用下列表达式可以把幅值转变成以 dB 为单位。

Magdb = 20 * log10(mag)

对于后两种方式，必须用下面的绘图函数才可以在屏幕上生成完整的伯德图。

Subplot(211), semilogx(w, 20 * log10(mag));

Subplot(212), semilogx(w, phase);

其中，semilogx( ) 函数表示以 dB 为单位绘制幅频特性曲线。

2. 奈氏图

调用函数

nyquist(num, den)

可绘制奈氏图。当用户需要指定频率 ω 时，可用函数

nyquist(num, den, w)

系统的频率响应就是在那些给定的频率点上得到的。

nyquist( ) 函数还可调用以下两种形式来计算 $G(j\omega)$ 的实部和虚部，但是不能直接在屏幕上产生奈氏图，需要通过调用 plot(re, im) 函数才可得到奈氏图。

[re,im,w] = nyquist(num,den);

[re,im,w] = nyquist(num,den,w);

此外，若给出的传递函数是零极点形式的，不必先化成多项式形式，而是调用下列函数直接画出伯德图。

h = zpk(z, p, k);

bode(h);

其中，z 为零点向量，p 为极点向量，k 为根轨迹增益。

【例 5-16】 已知系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+20)}$$

试用 MATLAB 绘制其伯德图和奈氏图。

解：（1）在 MATLAB 命令窗口下执行下列 M 文件，绘制伯德图。

```
z=[-2];p=[0,-1,-20];k=100;
h=zpk(z,p,k);
bode(h);
grid on;
```

或者将传递函数化成多项式形式，执行下列 M 文件，绘制伯德图。

```
num=[100 200];
den=[1 21 20 0];
w=logspace(-1,2);  % 在对数空间定义频率范围:0.1~100
bode(num,den);
grid on;
```

运行结果如图 5.49 所示。

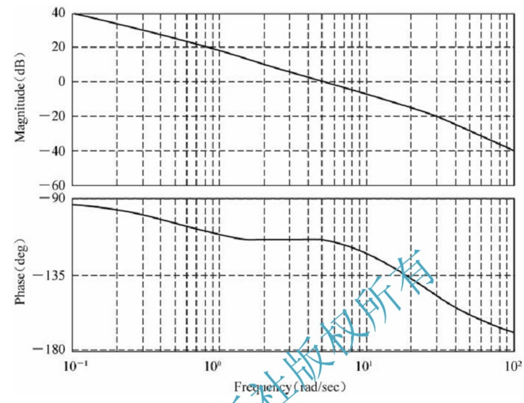


图 5.49 例 5-16 的伯德图

(2) 在 MATLAB 命令窗口下执行下列 M 文件，绘制奈氏图。

```
z=[-2];
p=[0 -1 -20]; k=100
h=zpk(z,p,k);
Nyquist(h);
```

运行结果如图 5.50 所示。

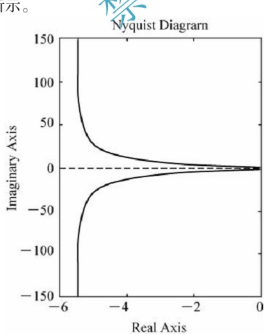


图 5.50 例 5-16 的奈氏图曲线

【例 5－17】 振荡环节的传递函数标准形式为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

当 ω_n 确定时，系统的频率特性与 ξ 的数值有关。用 MATLAB 给出 $\omega_n=1$ 时，在不同 ξ 取值下系统的伯德和奈氏图。

解：（1）在 MATLAB 的 Command Window 下执行下面的 M 文件，绘制振荡环节的伯德图：

```
zeta1 =0.1;den1 =[1 2* zeta1 1];
zeta3 =0.3;den3 =[1 2* zeta3 1];
zeta5 =0.5;den5 =[1 2* zeta5 1];
zeta7 =0.7;den7 =[1 2* zeta7 1];
zeta9 =1.0;den9 =[1 2* zeta9 1];
[mag1,phase1,w1] =bode(num,den1);
[mag3,phase3,w3] =bode(num,den3);
[mag5,phase5,w5] =bode(num,den5);
[mag7,phase7,w7] =bode(num,den7);
[mag9,phase9,w9] =bode(num,den9);
subplot(211);
semilogx(w1,20* log10(mag1),w3,20* log10(mag3),w5,20* log10(mag5),w7,20*
log10(mag7),w9,20* log10(mag9));
subplot(212);
semilogx(w1,phase1,w3,phase3,w5,phase5,w7,phase7,w9,phase9);
```

运行结果如图 5.51 所示。

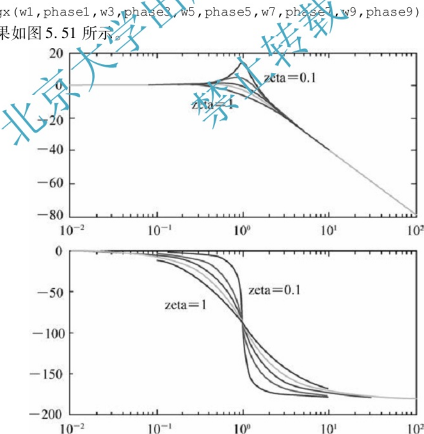
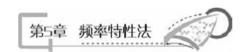


图 5.51　例 5－17 振荡环节伯德图



(2) 在 MATLAB 的 Command Window 下执行下面的 M 文件，绘制振荡环节的奈氏图：

```
num=1;
zeta1=0.4;den1=[1 2* zeta1 1];
zeta6=0.6;den6=[1 2* zeta6 1];
zeta8=0.8;den8=[1 2* zeta8 1];
[re1,im1]=nyquist(num,den1);
[re2,im2]=nyquist(num,den6);
[re3,im3]=nyquist(num,den8);
plot(re1,im1,re2,im2,re3,im3)
title('振荡环节奈氏图');
```

运行结果见图 5.52。

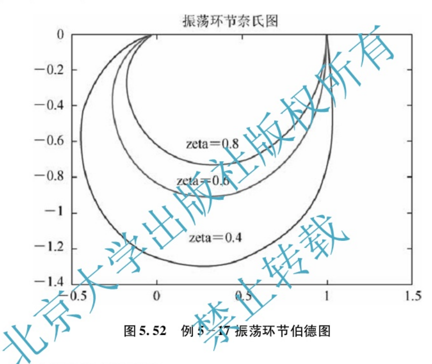


图 5.52　例 5-17 振荡环节伯德图

5.7.2　求相角裕度和幅值裕度

调用函数

[gm,pm,wcg,wcp] = margin(mag,phase,w);

可以方便地求得系统的相角裕度和幅值裕度。此函数的输入参数是幅值(不是以 dB 为单位)、相角与频率矢量，它们是由 bode 或 nyquist 命令得到的。函数的输出参数是幅值裕度 gm(不是以 dB 为单位)、相角裕度 pm(以角度为单位)、相位为 −180°处的频率 wcg、增益为 0dB 处的频率 wcp。

或

margin(mag, phase, w);

此格式中没有输出参数，但可以生成带有裕度标记(垂直线)的伯德图，并且在曲线上方给出相应的幅值裕度和相角裕度，以及它们所取得的频率。

【例 5-18】　开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{2.33}{(0.162s+1)(0.0368s+1)(0.00167s+1)}$，作

出开环伯德图，并求系统的稳定裕度。

解：在 MATLAB 的 Command Window 下执行下面的 M 文件，绘制开环伯德图：

```
h1 =tf([2.33],[0.162 1]);
h2 =tf([1],[0.0368 1]);
h3 =tf(1,[0.00167 1]);
h =h1* h2* h3;
[num,den] =tfdata(h);              % 获取传递函数的多项式形式
[mag,phase,w] =bode(num,den);
subplot(211);
semilogx(w,20* log10(mag));    % 使幅值以 dB 为单位
grid;
subplot(212);
semilogx(w,phase);grid;
[gm,pm,weg,wcp] =margin(mag,phase,w);
```

运行结果如图 5.53 所示，同时在 Workspace 窗口中可以得到系统的稳定裕度：

```
gm =54.0835
pm =93.6161
wcg =141.9361
wcp =11.642
```


图 5.53　例 5－19 开环伯德图

若要生成带有裕度标记的伯德图，则可将程序中最后一条改为

```
margin(mag,phase,w);
```

此时，图形如图 5.54 所示。



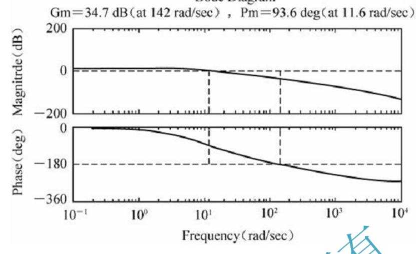


图 5.54 带裕度标记的伯德图

小 结

频率特性是线性系统(部件)在正弦输入下，稳态输出与输入之比对频率的函数关系。它也是一种数学模型，既能反映出系统的静态性能，又可反映出系统动态过程的性能，是经典控制理论最基本的概念之一。

将系统(或环节)传递函数中的复数 s 换成纯虚数 $j\omega$，即可得出系统(或环节)的频率特性。频率法是运用开环频率特性研究闭环动态响应的一套完整的图解分析计算法。其图形因采用的坐标系不同而分为奈氏图(极坐标图)和伯德图(对数坐标)，各种形式之间是互通的，而每种形式却有其特定的适用场合。例如，用奈氏图分析闭环系统的稳定性既方便又直观，若要分析某个典型环节的参数变化对系统性能的影响，则伯德图要直观些。

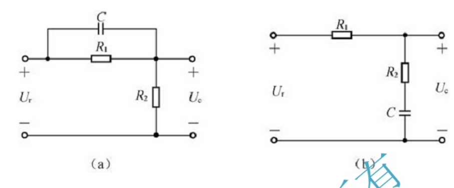
奈氏稳定判据是频率响应法分析、设计控制系统的基础。利用奈氏稳定判据，除了可以判断系统稳定性外，还可以获得相角裕度和幅值裕度等重要信息。

开环对数频率特性曲线——伯德图是控制系统工程设计的重要工具。“三频段”理论表征了系统的特征和性能。开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 低频段的斜率表征了系统的型别，其高度则表征了开环传递函数增益的大小，因而低频段全面表征系统稳态性能；中频段的斜率、宽度以及截止频率则表征系统的动态性能；高频段对动态性能的影响较小，但却表征了系统的抗干扰能力。

利用开环频率特性的性能指标可对系统的时域性能指标进行评估。对于二阶系统，两种指标间的关系是确切的，而对于高阶系统则是近似的，但在工程设计中已完全满足要求。

习　题

1. 试求题图 5.1(a)、(b)网络的频率特性。



题图 5.1

2. 若系统的单位阶跃响应为 $h(t)=1-1.8e^{-4t}+0.8e^{-9t}\ (t\geqslant 0)$，试求该系统频率特性。

3. 绘制下列传递函数的幅相频率特性曲线：

(1) $G(s)=\dfrac{250}{(s+5)(s+15)}$；

(2) $G(s)=\dfrac{50}{s(s^2+s+1)}$。

4. 已知某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，在正弦信号 $r(t)=\sin 10t$ 作用之下，闭环系统的稳态响应 $c_s(t)=\sin\left(10t-\dfrac{\pi}{2}\right)$，试计算 K、T 的值。

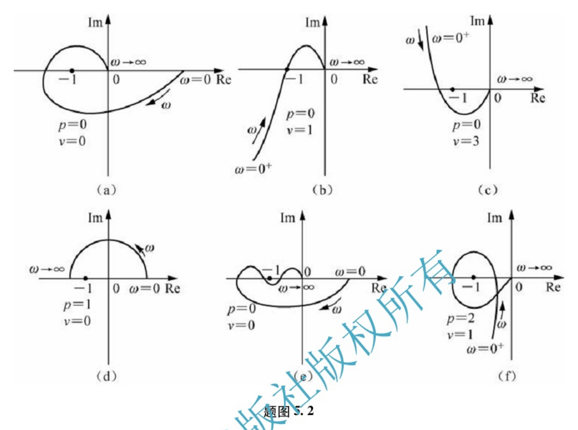
5. 系统开环传递函数如下，试分别绘制各系统的对数幅频特性的渐近线和对数相频特性曲线。

(1) $G(s)=\dfrac{2}{(2s+1)(8s+1)}$　　(2) $G(s)=\dfrac{10(s+1)}{s^2}$

(3) $G(s)=\dfrac{20(5s+1)}{s^2(10s+1)}$　　(4) $G(s)=\dfrac{50(0.02s-1)}{s(0.1s+1)}$

6. 已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(4s+1)}$，试绘制系统的开环幅相频率特性曲线，并求闭环系统稳定的临界增益 K 值。

7. 已知系统开环幅相频率特性如题图 5.2 所示，试根据奈氏稳定判据判别系统的稳定性，并说明闭环右半平面的极点个数。其中 p 为开环传递函数在 s 右半平面极点数，v 为开环积分环节的个数。

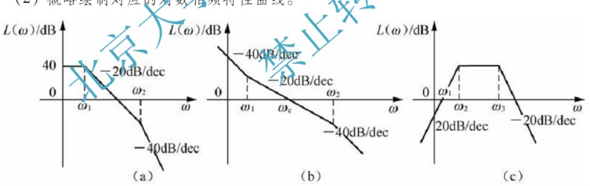


题图 5.2

8. 三个最小相角系统传递函数的近似对数幅频特性曲线分别如题图 5.3 所示。要求：

(1) 写出对应的传递函数；

(2) 概略绘制对应的对数相频特性曲线。



题图 5.3

9. 设单位负反馈系统开环传递函数：

(1) $G(s)=\dfrac{as+1}{s^2}$，试确定使相角裕度等于45°的 α 值；

(2) $G(s)=\dfrac{K}{(0.01s+1)^3}$，试确定使相角裕度等于45°的 K 值；

(3) $G(s)=\dfrac{K}{s(s^2+s+100)}$，试确定使幅值裕度等于20dB 的 K 值。

10. 已知系统开环传递函数，$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)(s+1)}$ $(K、T>0)$，试根据奈氏稳定

判据确定其闭环稳定的条件并计算。

(1) $T=2$ 时，K 值的范围；

(2) $K=10$ 时，T 值的范围；

11. 已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{4}{s^2(0.2s+1)}$。

(1) 绘制系统的伯德图，并求系统的相角裕度；

(2) 在系统中串联一个比例微分环节 $(s+1)$，绘制系统的伯德图，并求系统的相角裕度；

(3) 说明比例微分环节对系统稳定性的影响；

(4) 说明相对稳定性较好的系统，中频段对数幅频应具有的形状。

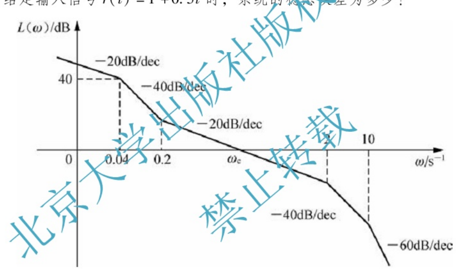
12. 设最小相位系统开环对数幅频特性如题图 5.4 所示。

(1) 写出系统开环传递函数 $G(s)$；

(2) 计算开环截止频率 ω_c；

(3) 计算系统的相角裕度；

(4) 若给定输入信号 $r(t)=1+0.5t$ 时，系统的稳态误差为多少？



题图 5.4

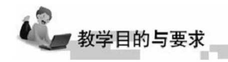
13. 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，若要求开环截止频率提高 α 倍，相角裕度保持不变，问 K、T 应如何变化？

14. 设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(0.2s+1)(0.02s+1)}$，试求：

(1) 根据相角裕度和幅值裕度分析闭环系统的稳定性；

(2) 应用经验公式估算系统的时域指标：超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s。

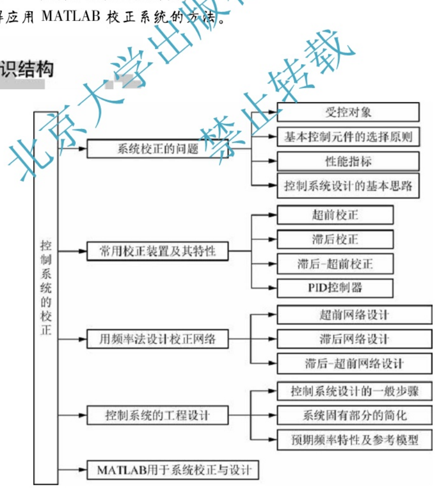
第6章 控制系统的设计与校正



教学目的与要求

1. 熟悉几种典型的无源及有源校正装置，掌握校正网络频率特性及其作用。
2. 熟练掌握串联校正的频率设计方法。
3. 掌握 PID 控制器及其功能特点。
4. 了解应用 MATLAB 校正系统的方法。

知识结构



对自动控制系统研究的主要任务有两个，一是已知控制系统的结构形式及其全部参数，求取系统的各项性能指标，以及这些性能指标与系统参数间的关系，这一过程称之为系统分析；二是在给定系统的不可变部分基础上，当调整系统的参数不能同时满足系统的各项性能指标要求时，就要在系统中引进附加装置，改变系统的结构，从而改变系统的性能，使之满足工程要求，这种措施称之为系统的设计或校正。引入的附加装置称为校正装置，在工程应用中，常用的校正装置是 PID 控制器。系统中除校正装置外的其他部分称为系统的固有部分。控制系统的校正也就是根据系统固有部分的性能和对系统性能指标的要求，确定校正装置的结构和参数。

控制系统校正的方法一般有根轨迹法和频域法两种。在进行系统校正时，若所使用的指标是时域指标，则一般宜用根轨迹法进行设计，使闭环系统的极点重新配置；若所使用的指标是频域指标，宜用频率法进行设计。频域法设计是目前应用最广泛的工程方法之一，本章主要介绍用频域分析法对单输入—单输出线性定常系统进行设计及校正的步骤和方法。

6.1　系统设计及校正问题

如第 1 章所述，系统是由受控对象和控制装置两部分组成的，而控制装置包括与控制有关的基本元件，如传感器、执行机构、比较元件、放大元件等，因此有关系统设计的问题必须从整体来研究，不能分割。从基本元件的选择到控制方案的制订和设计，都应该贯穿这一原则。

1. 受控对象

受控对象和控制装置同时进行设计是比较合理的。然而，相当多的场合是先给定受控制对象，再进行控制系统设计。这就要求对受控对象要做充分的了解，包括对象的工作原理和特点，如哪些参量需要控制、哪些参量能够测量、可以通过哪几个机构进行调整、对象的工作环境和干扰如何，等等。还必须尽可能准确地掌握受控对象的动态数学模型，以及对象的性能要求，这些都是系统设计的主要依据。

2. 基本控制元件的选择原则

控制装置是由为完成给定任务而设置的一系列元件组成的。如图 1.5 所示，闭环系统中除被控对象之外的控制部分一般应包括测量元件、控制器(比较元件、放大元件)、执行元件等。从控制的观点来看，对这些基本部件的选择，应能充分利用其限制和功率，最大限度地发挥系统技术潜力。

通常，按被控对象的功率要求和所需能源形式以及被控制对象的工作条件来选择执行元件，如伺服电动机、液压/气动伺服马达等；根据被控制量的形式选择测量元件，如电位器、热电偶、测速发电机以及各类传感器等；然后按输入信号和反馈信号的形式选择给定元件和比较元件，如电位计、旋转变压器、机械式差动装置等；根据控制精度和驱动执行元件的要求在比较元件和执行元件之间配置一个(或几个)增益可调的放大器，如电压放大器(或电流放大器)、功率放大器等。以上各类元件在选择之前都必须根据已知条件和系统要求进行综合考虑和计算。考虑的因素应包括性能、尺寸、质量、环境适

应性和经济性等方面。选择不到合适的元件，就要自行设计和制造。

3. 控制方案

实现自动控制的基本方式有开环控制、闭环控制和复合控制，各种控制方案的特点已在第1章有所介绍，在此不再赘述。设计者应根据受控对象的特性和对控制系统的各项技术要求，从全局出发选择合理的控制方案。高精度的系统多采用闭环控制和复合控制。

4. 性能指标

对于控制系统，系统的性能是有一定要求的。进行控制系统的设计，不仅要了解不可变部分的结构和参数，还要了解系统提出的全部性能指标。

性能指标通常是由使用单位或被控对象的设计制造单位提出的。不同的控制系统对性能指标的要求应有不同的侧重，例如，调速系统对平稳性和稳态精度要求较高，而随动系统则侧重于快速性要求。

性能指标的提出，应符合实际系统的需要与可能。一般地说，性能指标不应当比完成给定任务所需要的指标更高。例如，若系统的主要要求是具备较高的稳态工作精度，则不必对系统的动态性能提出不必要的过高要求。实际系统所具备的各种性能指标，会受到组成元、部件的固有误差、非线性特性、能源的功率以及机械强度等各种实际物理条件的制约。如果要求控制系统具备较快的响应速度，则应考虑系统能够提供的最大速度和加速度，以及系统容许的强度极限。除了一般性能指标外，具体系统往往还有一些特殊要求，如低速平稳性，对变载荷的适应性等，也必须在系统设计时分别加以考虑。

控制系统的性能指标通常包括动态和静态两个方面。动态性能指标用于反映控制系统的瞬态响应情况，一般可分为时域性能指标和频域性能指标。时域性能指标包括调整时间 t_s、上升时间 t_r、峰值时间 t_p 和最大超调量 σ_p 等。频域性能指标：开环指标包括相角裕度 γ、幅值裕度 K_g（或 hdB）；闭环指标包括谐振峰值 M_r、谐振频率 ω_r 和频带宽度 ω_b 等。时域与频域性能指标可以互换，由第5章知，二者有如下关系。

1）闭环频域指标与开环指标

在二阶系统中，闭环频域指标与开环指标存在准确的关系如下：

带宽频率
$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{(1-2\xi^2)^2+1}}$$

截止频率
$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$$

相角裕度
$$\gamma = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}$$

超调量
$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

调节时间
$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}, \qquad \omega_c t_s = \frac{7}{\tan\gamma}$$

谐振频率
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$$

谐振峰值
$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (\xi \leqslant 0.707)$$

$$M_r = \frac{1}{\sin\gamma}\text{（在高阶系统中一般采用）}$$

$$\omega_b \approx \omega_c \text{（初步设计时取此式计算，然后再进行修正）}$$

2）频域指标与时域指标的关系

初步设计时可采用近似的计算公式：

$$t_s = (6 \sim 8)\frac{1}{\omega_c}$$

$$\sigma\% = \begin{cases} 100(M_r - 1)\%, & M_r \leqslant 1.25 \\ 50\sqrt{M_r - 1}\%, & M_r > 1.25 \end{cases}$$

或

$$M_r = \begin{cases} \sigma\% + 1, & \sigma\% \leqslant 25\% \\ 4\sigma\% + 1, & \sigma\% > 25\% \end{cases}$$

这些计算式是工程设计中的经验公式，在一定的条件下适用。通常情况下，把时域指标换算为频域指标，然后利用开环对数幅频特性进行设计计算。

5. 控制系统设计的基本思路

通常，系统中的固有部分除系统增益可调外，其余结构和参数一般不能任意改变。实践证明，由固有部分组成的系统往往不能同时满足各项性能指标的要求，有的甚至还不稳定。因此，需要对系统进行再设计(通过改变系统结构，或在系统中加进附加装置或元件)，以改变系统的总体性能，使之满足要求。

所谓校正，就是给系统附加一些具有典型环节特性的电网络、模拟运算部件及测量装置等，靠这些环节的配置来有效地改善整个系统的性能，以达到要求的指标。为了满足性能指标而在系统中添加的适当装置，称为校正装置。对单输入—单输出系统，按照校正装置在系统中的连接方式，可分为串联校正、反馈校正、前馈校正和串联前馈复合校正四种，其框图如图 6. 1 所示，图中 $G_c(s)$ 为校正装置。

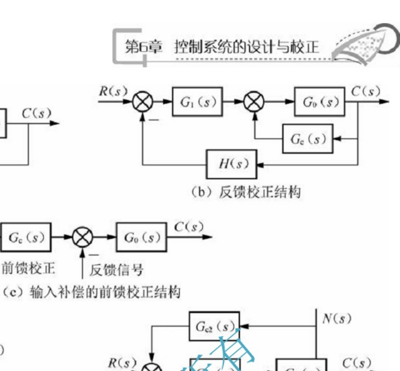
串联校正：校正装置一般接在系统误差测量点之后和对象之前，位于系统前向通路中如图 6. 1(a)所示。

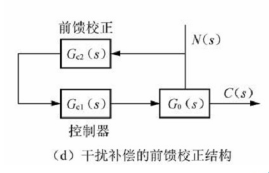
反馈校正：校正装置接在系统局部反馈回路(或称内反馈回路)的反馈通路上，如图 6. 1(b)所示。

前馈校正：又称顺馈校正，是在系统主反馈回路之外采用的校正方式。前馈校正一般有两种形式，一种是校正装置接在系统给定值之后，主反馈作用点之前的前向通路上，如图 6. 1(c)所示。另一种是校正装置接在系统可测扰动作用点与误差测量点之间，对扰动信号进行直接或间接测量，经变换后接入系统，形成一条附加的对扰动进行补偿的通路，又称干扰补偿式校正，如图 6. 1(d)所示。这两种校正方式可以单独用于开环控制系统，也可以作为反馈控制系统的附加校正而组成复合控制系统，如图 6. 1(e)所示。

校正方式的选择取决于系统中的信号性质、技术实现的方便性、可供选择的元件、抗扰性要求、经济性要求、环境使用条件以及设计者的经验等因素。目前在控制工程实践中，常用的校正方式是串联校正和反馈校正。但由于串联校正比反馈校正设计简单，易于实现，在控制工程实践中获得了广泛应用，因此本章只讨论串联校正。典型的串联校正装置有超前校正、滞后校正、滞后-超前校正和 PID 校正等装置。

在性能指标要求较高的控制系统设计中，通常兼用串联校正与反馈校正两种方式。





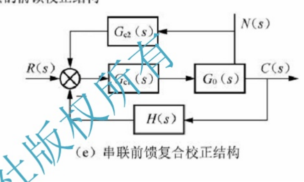


图 6.1　控制系统校正的几种方式

另外，校正装置的物理器件可以有电气的、机械的、液压的和气动的等形式，选择的一般原则是根据系统本身结构的特点、信号的性质和设计者的经验，并综合经济指标和技术指标进行。本章以电气校正装置作为控制器，详述有源和无源装置的工作原理和设计方法。其思想方法同样适用于其他类型的校正装置设计。

需要指出，由于电子技术和计算机技术的发展，目前实际系统中大量采用的控制器是有源校正装置，如典型的 PID 调节器。同时正如本章 6.2 节大家将看到的，无源校正与有源校正尽管组成形式有差别，但它们的工作原理是相同的。

控制系统校正的方法一般有根轨迹法和频域法两种。在进行系统校正时，究竟采用时域还是频域方法进行设计，须根据控制系统性能指标的表达方式选择。在进行系统设计时，若所使用的指标是时域指标，则一般宜用根轨迹法进行设计，使闭环系统的极点重新配置；若所使用的指标是频域指标，宜用频率法(如伯德图或极坐标)进行设计。目前工程技术界多习惯采用频率法，故常常要通过近似公式进行两种指标的互换。

【思考题】　什么是校正？常用的校正方式有哪几种？

6.2　常用校正装置及其特性

下面分别介绍超前、滞后、滞后-超前校正装置及 PID 校正装置的线路、数学模型及其在系统中的作用。

6.2.1　超前校正

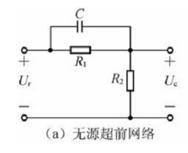
若校正装置具有超前的相频特性，即输出信号的相位超前于输入信号的相位，则称



它为超前校正装置。

1. 超前校正装置及其传递函数

图6.2分别为无源和有源超前校正网络。



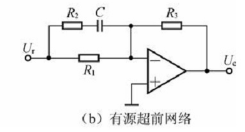


图6.2　超前校正装置

对于图6.2(a)所示的无源校正装置，忽略该网络的输入阻抗和输出阻抗效应，则有

$$U_c(s)=\frac{U_r(s)}{R_1//\frac{1}{Cs}+R_2}R_2$$

其传递函数为

$$G_c(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\times\frac{R_1Cs+1}{\frac{R_2}{R_1+R_2}R_1Cs+1}\tag{6-1}$$

设 $T=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$；$\alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2}>1$，则

$$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{\alpha(1+Ts)}\tag{6-2}$$

校正装置的开环放大倍数$\frac{1}{\alpha}<1$，这将影响到系统的稳态精度，因而一般再增加一个放大倍数为α的放大环节，这样校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=\alpha\times\frac{1+\alpha Ts}{\alpha(1+Ts)}=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}\tag{6-3}$$

对于图6.2(b)所示的有源校正装置，由图可知

$$\frac{U_c}{U_r}=-\frac{z_2}{z_1}$$

其中 $z_1=\frac{R_1\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)}{R_1+\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)}=\frac{R_1(1+R_2Cs)}{1+(R_1+R_2)Cs}$，$z_2=R_3$，负号是因为采用了负反馈的运算放大器，再串联一个反相运算放大器即可消除负号。故有

$$G_c(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{R_3[1+(R_1+R_2)Cs]}{R_1(1+R_2Cs)}=K_c\frac{1+\tau s}{1+Ts}\tag{6-4}$$

式中 $K_c=\frac{R_3}{R_2}$，$T=R_2C$，$\tau=(R_1+R_2)C$。



令 $\alpha T=\tau$，即有 $\alpha=\frac{\tau}{T}=\frac{R_1+R_2}{R_1}>1$；并使$K_c=1$，则式(6-4)成为

$$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \tag{6-5}$$

式(6-5)即为超前有源校正装置对应的传递函数，与式(6-3)相比，二者的形式完全一致。

2. 超前校正装置的特性

$G_c(s)$的伯德图如图6.3所示。两个转折频率分别为 $\omega_1=\frac{1}{\alpha T}$，$\omega_2=\frac{1}{T}$。当 $\omega>\omega_2$ 时，$L(\omega)=20\lg\omega\alpha T-20\lg\omega T=20\lg\alpha$。

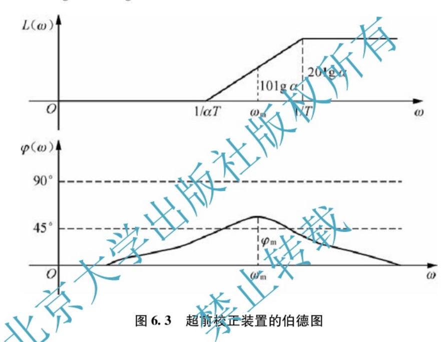


图 6.3 超前校正装置的伯德图

由式(6-3)可求得该校正装置的相频特性表达式为

$$\varphi(\omega)=\arctan(\alpha\omega T)-\arctan(\omega T) \tag{6-6}$$

由于 $\alpha>1$，故当 $0<\omega<\infty$ 时，$\varphi(\omega)>0$。这表示该校正装置输出信号的相位总超前输入信号的相位，因而称其为超前校正装置。

由图6.3可见，在 $\omega=\omega_m$ 时，$G_c(j\omega)$有最大的超前相角 φ_m。令$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=0$ 可求得

$$\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\alpha T}} \tag{6-7}$$

式(6-7)表示 ω_m 处于转折频率$\frac{1}{T}$和$\frac{1}{\alpha T}$的几何平均值处。

$G_c(s)$的幅相频率特性曲线如图6.4所示。由图可见，它是一个位于第一象限的半圆，圆心坐标$\left(\frac{\alpha+1}{2}, j0\right)$，半径为$\frac{\alpha-1}{2}$。从坐标原点到半圆做切线，与正实轴的夹角即为该校正装置的最大超前角 φ_m。

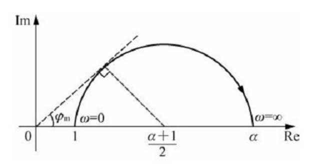


图 6.4　超前装置幅相频率特性曲线

由图可求出最大超前相角为

$$\sin\varphi_m = \frac{(\alpha-1)/2}{1+(\alpha-1)/2} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad (6-8)$$

即

$$\varphi_m = \arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad (6-9)$$

或写成

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} \quad (6-10)$$

α 值越大，超前校正装置提供的相角超前量也越大，可使得校正后系统的相角裕度越大。但过大的 α 值会造成已校正系统的带宽过宽，从而使系统对高频噪声干扰的抵制能力下降，导致系统失控。一般单级超前网络的 φ_m 不超过 60°。

3. 超前校正的作用

超前串联校正的作用可以用图 6.5 说明。设单位负反馈系统原有开环对数渐近幅频曲线和相频曲线如图 6.5 中曲线 1 所示。可以看出，$20\lg|G|$在中频段截止频率 ω_{c1} 附近为 -40dB/dec 斜率线，并且所占频率范围较宽，故系统动态响应振荡强烈，平稳性差。对照相频曲线明显看出，相角裕度为负，原系统不稳定。

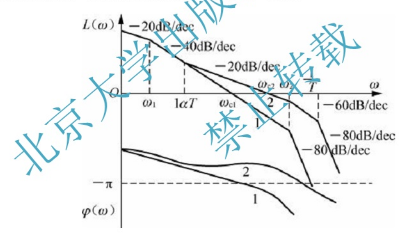


图 6.5　系统串联超前校正的作用

给原系统串入超前校正环节，其转折频率$\frac{1}{T}$和$\frac{1}{\alpha T}$分别设在原截止频率 ω_{c1} 的两侧，并提高系统的开环增益，使超前校正的增益损失得到补偿，则校正后系统的开环对数特性曲线如图中曲线 2 所示。由于正斜率的作用，渐近幅频的中频段斜率变为 -20dB/dec，而且截止频率增大到 ω_{c2}；对照相频特性，由于正相移的作用，使截止频率附近的相位明显上移，具有较大的稳定裕度。故有效地改善了原系统的稳定性，并可以获得足够的快速性。

但是超前校正很难使原有系统的低频段特性得到改善，如果采取进一步提高开环增益的办法使低频段上移，则系统的平稳性将有所下降；幅频过分上移，还会大大削弱系统的抗高频干扰的能力。故超前校正对提高系统稳态精度的作用是很少的。



【思考题】 超前校正装置的特性是什么，在系统中如何起校正作用?

6.2.2 滞后校正

1. 滞后校正装置及其传递函数

由 RC 电路构成的无源滞后校正网络和由运算放大器构成的有源滞后校正电路如图 6.6 所示。



图 6.6 滞后校正装置

对于图 6.6(a)所示的无源滞后校正装置，其传递函数为

$$G_c = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1+\beta Ts}{1+Ts} \tag{6-11}$$

其中 $\beta = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} < 1$，$T = (R_1+R_2)C$。

对于图 6.6(b)所示的有源滞后校正装置，$Z_1 = R_1$，$Z_2 = \dfrac{R_3\left(R_2+\dfrac{1}{Cs}\right)}{R_3+\left(R_2+\dfrac{1}{Cs}\right)} = \dfrac{R_3(1+R_2Cs)}{1+(R_2+R_3)Cs}$，

故有

$$G_c(s) = \frac{-U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{R_3(1+R_2Cs)}{R_1[1+(R_2+R_3)Cs]} = K_c\,\frac{1+\tau s}{1+Ts} \tag{6-12}$$

式中 $K_c = \dfrac{R_3}{R_2}$，$\tau = R_2C$，$T = (R_2+R_3)C$。令 $\beta T = \tau$，则有 $\beta = \dfrac{\tau}{T} = \dfrac{R_2}{R_2+R_3} < 1$；若令 $K_c = 1$，则式(6-12)成为

$$G_c(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1+\beta Ts}{1+Ts} \tag{6-13}$$

与式(6-11)比较可知，二者的形式完全一致。因此，二者也具有相同的特性。

2. 滞后校正装置的特性

根据传递函数可画出滞后校正装置的伯德图，如图 6.7 所示。

由图可见，校正装置输出信号的相位总是滞后于输入信号的相位，故称其为滞后校正装置。从形式上看，式(6-11)与式(6-3)是一样的，因此与超前校正装置类似，有

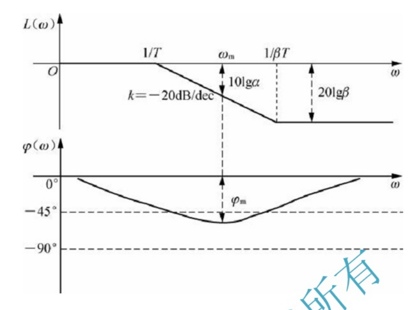


图 6.7　滞后校正装置的伯德图

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\beta T}} \tag{6-14}$$

即滞后校正装置的最大滞后角 φ_m 位于转折频率 $\omega_1 = \frac{1}{T}$ 和 $\omega_2 = \frac{1}{\beta T}$ 的几何中点 ω_m 处，其大小为

$$\varphi_m = \arcsin\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \tag{6-15}$$

3. 滞后校正所起的作用

滞后校正在系统中的作用可以用图 6.8 说明。

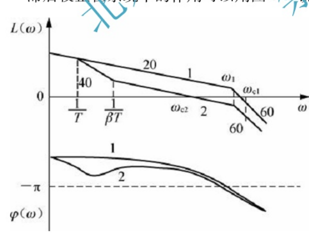


图 6.8　系统串联滞后校正的作用

设单位负反馈系统原有的开环对数渐近幅频、相频曲线如图 6.8 中曲线 1 所示。可以看出，20lg $|G|$ 在中频段截止频率 ω_{c1} 附近为 −60dB/dec 斜率线，故系统动态响应的平稳性很差。对照相频曲线可以看出，相位在 −180°附近，原系统临界稳定。

将原系统串以滞后校正，校正环节的转折频率 $\frac{1}{\beta T}$ 和 $\frac{1}{T}$ 均设置在远离 ω_{c1}、且斜率为 −20dB/dec 的低频段。则校正后系统的开环对数特性曲线如图 6.8 中曲线 2 所示。由于滞后特性负斜率的作用，显著减小了系统频宽，并由此而造成在新的截止频率 ω_{c2} 附近具有 −20dB/dec 的斜率段，故滞后校正是以对快速性的限制换取了系统的稳定性。从相频曲线看，校正虽然带来负相移，但是处于频率较低的部位，对系统的稳定裕

度不会有很大影响，反而是由于截止频率降低使 γ 大大提高。

另外，串入滞后校正并没有改变原系统最低频段的特性，故对系统的稳态精度不起作用。相反，往往还允许适当提高开环增益，进一步改善系统的稳态性能。

【思考题】 滞后校正装置具有什么样的特性，它是如何改善系统性能的？

6.2.3 滞后-超前校正

1. 滞后-超前校正装置及其传递函数

由 RC 电路构成的无源滞后-超前校正网络和由运算放大器构成的有源滞后-超前校正电路如图 6.9 所示。

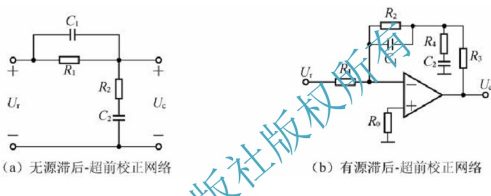


图 6.9 滞后-超前校正装置

由图 6.9(a)可以获得无源滞后-超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2+T_3)s+1} \tag{6-16}$$

式中 $T_1=R_1C_1$，$T_2=R_2C_2$，$T_3=R_1C_2$。将式(6−16)的分母分解为两个因式的乘积，即

$$G_c(s)=\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_1's)(1+T_2's)} \tag{6-17}$$

比较式(6−16)与式(6−17)的分母，有

$$T_1'T_2'=T_1T_2$$
$$T_1'+T_2'=T_1+T_2+T_3$$

设 $\frac{T_1'}{T_1}=\frac{T_2}{T_2'}=\alpha>1$，且 $T_1>T_2$，则有

$$\alpha T_1>T_1>T_2>T_2/\alpha \tag{6-18}$$

因此传递函数式(6−17)也可写成

$$G_c(s)=\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+\alpha T_1s)(1+\frac{T_2}{\alpha}s)} \tag{6-19}$$

式中 $\frac{(1+T_1s)}{(1+\alpha T_1s)}$ 部分起滞后校正作用，$\frac{(1+T_2s)}{\left(1+\frac{T_2}{\alpha}s\right)}$ 部分起超前校正的作用。

对于有源滞后-超前校正装置，由图 6.9(b)所示的电路实现，其传递函数为

$$G_c(s)=K_c\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_0s)(1+T_3s)} \tag{6-20}$$

式中 $K_c=\frac{R_2+R_3}{R_1}$，$T_0=R_2C_1$，$T_1=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}C_1$，$T_2=(R_3+R_4)C_2$，$T_3=R_4C_2$。并取 $R_1=R_0$，选择参数，使 $T_1>T_2$，则有

$$T_0>T_1>T_2>T_3 \tag{6-21}$$

设$\frac{T_0}{T_1}=\frac{T_2}{T_3}=\alpha>1$，并使 $K_c=1$，则式(6-20)可写成

$$G_c(s)=\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+\alpha T_1s)\left(1+\frac{T_2}{\alpha}s\right)} \tag{6-22}$$

可见，其形式与无源滞后-超前校正装置的传递函数形式相同。

2. 滞后-超前校正装置的特性

滞后-超前校正装置的特性如图 6.10 所示。可以看出，曲线的低频部位具有负斜率、负相移，起滞后校正作用；后一段具有正斜率、正相移，起超前校正作用。

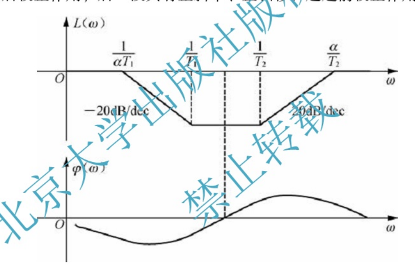


图 6.10 滞后-超前校正装置伯德图

6.2.4 PID 控制器

PID 校正装置(又称 PID 控制器或 PID 调节器)是一种有源校正装置，一般串接在系统的前向通路中，起串联校正的作用。它是最早发展起来的控制策略之一，也是最实用的控制器，已有 50 多年历史，现在仍然是应用最广泛的工业控制器。其实现方式有电气式、气动式和液力式。PID 控制器不仅适合于数学模型已知的系统，也可用于许多被控对象数学模型难以确定的黑箱或灰箱系统。总体而言，它主要有如下优点：

(1) 原理简单，应用方便，参数整定灵活。

(2) 适用性强。广泛应用于电力、机械、化工、热工、冶金、轻工、建材、石油等行业。

(3) 鲁棒性强。即其控制的质量对受控对象的变化不太敏感，这是它获得广泛应用

的最重要的原因之一。因为实际的受控对象在受外界的扰动时，尤其是外界负荷发生变化时，受控对象特性会发生很大变化，为得到良好的控制品质，必须经常改变控制器的参数，这在实际操作上是非常麻烦的；又如，由于环境的变化或设备的老化，受控对象模型的结构或参数均会发生一些不可预知的变化，为保证控制质量，就应对控制器进行重新设计，这在有些过程中是不允许的。因此，如果控制器鲁棒性强，就无须经常改变控制器的参数或结构。

目前，基于 PID 控制而发展起来的各类控制策略不下几十种，如经典的 Ziegler - Nichols 算法和它的精调算法、预测 PID 算法、最优 PID 算法、控制 PID 算法、幅值裕度/相角裕度 PID 设计、极点配置 PID 算法、鲁棒 PID 等。本节主要介绍 PID 控制器的基本工作原理及几个典型设计方法。

1. PID 控制器工作原理

典型的 PID 控制器原理图是如图 6.11 所示的有源滞后-超前校正装置，图 6.12 则为它的控制结构框图。

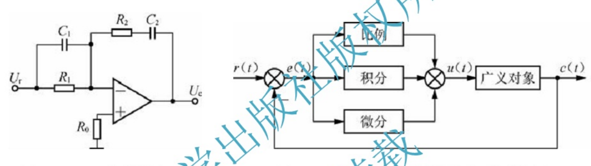


图 6.11　PID 控制器原理图　　**图 6.12　具有 PID 控制器的控制系统结构图**

由图 6.12 可见，PID 控制器是通过对误差信号 $e(t)$ 进行比例、积分和微分运算，得到控制器的输出 $u(t)$，该值就是控制对象的控制值。PID 控制器的数学描述为

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int e(t)\,dt + T_D\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{6-23}$$

式中 $u(t)$ 为控制输入，$e(t) = r(t) - c(t)$ 为误差信号，$r(t)$ 为输入量，$c(t)$ 为输出量。$K_p e(t)$ 为比例控制项，K_p 为比例系数；$\frac{1}{T_I}\int e(t)\,dt$ 为积分项，T_I 为积分时间常数；$T_D\frac{de(t)}{dt}$ 为微分项，T_D 为微分时间常数。根据积分控制项与微分控制项的有无，可分为 P、PI、PD 和 PID 等多种形式的控制器，下面对这四种控制器做简要分析，从而对比例、微分和积分作用有一个初步的认识。

2. 比例调节器

比例调节器是最古老、最简单的控制器。可以看成控制器的源。其传递函数为

$$G_c(s) = K_p$$

或

$$u(t) = K_p e(t) \tag{6-24}$$

即在 PID 控制器中使 $T_I\to\infty$，$T_D\to 0$ 。由比例调节器构成的系统如图 6.13 所示。

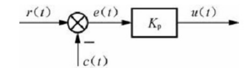


图 6.13　比例控制系统结构图

显然，比例控制能实时成比例地反映系统的偏差信号，一旦有偏差，控制器立即产生控制信号，以使偏差减小。调整比例系数 K_p，将改变系统的开环增益，从而对系统的性能产生影响。

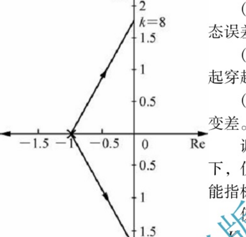


图 6.14　$G(s)=\dfrac{K_p}{(s+1)^3}$ 的根轨迹图

（1）在系统中增大比例系数 K_p，可减少系统的稳态误差以提高稳态精度。

（2）增加 K_p 使系统的对数幅频特性曲线上移，引起穿越频率的增大，可改善系统的快速性。

（3）K_p 往往会使得系统的相角裕度减小，稳定性变差。

调节 K_p 时，要权衡利弊，综合考虑。在一些情况下，仅靠调整比例系数是无法同时满足系统的各项性能指标要求的，因此，还要一些其他形式的控制器。

例如，某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_p}{(s+1)^3}$，其根轨迹如图 6.14 所示。显然，当 $K_p \geqslant 8$ 时，系统将产生振荡。其闭环单位阶跃响应曲线如图 6.15所示，从图 6.15 也可以发现，当 K_p 增大时，系统稳态输出增大，系统响应速度和超调量也增大，$K_p=8$ 时，系统产生等幅振荡，已不稳定。可见，单纯采用 K_p 来改善系统的性能指标是不合适的。

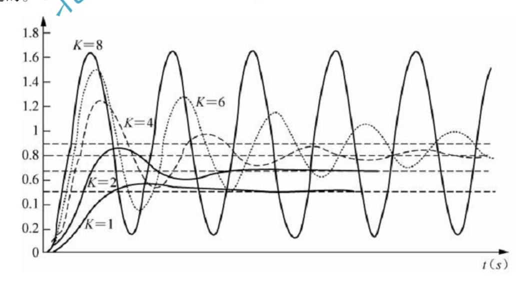


图 6.15　闭环单位阶跃响应曲线图

又如，图6.16所示的比例控制系统，系统的调节时间 $t_s = \frac{4}{10} = 0.4\text{s}$，与 K_p 无关，即单纯的比例控制不能改变调节时间。

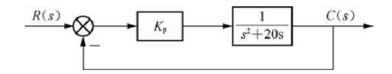


图6.16　比例控制系统示例

3. 比例-积分调节器

比例-积分调节器，简称PI调节器，是在PID调节器中，当 $T_D \to 0$ 时的一种形式。控制输出 $u(t)$ 与 $e(t)$ 的关系为

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int e(t)\mathrm{d}t\right] \tag{6-25}$$

PI调节器可以由如图6.17所示的运算放大器电路来实现，其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 Cs}\right) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \tag{6-26}$$

式中 $K_p = \frac{R_2}{R_1}$，$T_I = R_2 C$。对应的伯德图如图6.18所示。

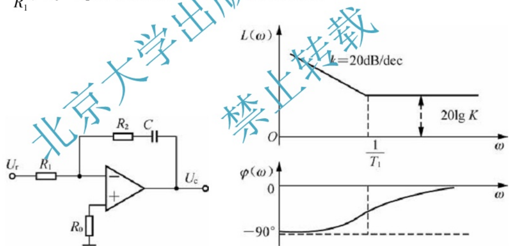


图6.17　PI控制器原理图　　　　**图6.18　PI控制器的伯德图**

显然，PI调节器的相频特性为负，即具有相位滞后的特性，故它是一种滞后校正装置。但由于积分环节的引入，相当于增加了一个位于原点的开环极点，使得它与前述的滞后校正装置有所不同。首先，积分环节的引入使得系统的型别增加，无静差度增加，从而使稳态精度大为改善；另外，积分环节将引起 $-90°$ 的相移，对系统的稳定性不利。但 $G_c(s)$ 中的比例微分环节的引入，相当于增加了一个负实数开环零点，又有可能使系统稳定性和快速性朝好的方向变化，如果适当选择参数 K_p 和 T_I，就可使系统的稳态和动态性能满足要求。积分作用的强弱取决于积分时间常数 T_I，T_I 越大，积分作用越弱，会影响系统的静态性能，同时，也会导致系统响应速度的变慢。但 T_I 减小时，积分作用增强，

系统的稳定性变差。在实际应用中可通过合理调节 K_p 和 T_I 的参数使系统的动态性能和静态性能均满足要求。

4. 比例-微分调节器

比例-微分调节器，简称 PD 调节器，是在 PID 调节器中，当 $T_I \to \infty$ 时的一种形式。控制输出 $u(t)$ 与 $e(t)$ 的关系为

$$u(t) = K_p\left[e(t) + T_D\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{6-27}$$

PD 调节器可以由如图 6.19 所示的运算放大器电路来实现。其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{-U_c(s)}{U_r(s)} = K_p(1 + T_D s) \tag{6-28}$$

式中 $K_p = \frac{R_2}{R_1}$，$T_D = R_1 C$ ，对应的伯德图如图 6.20 所示。

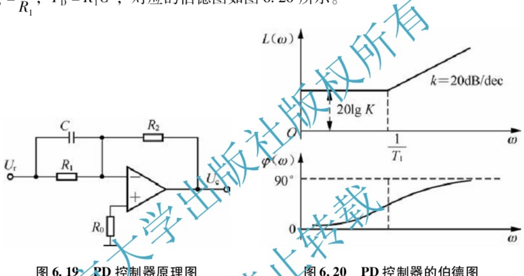


图 6.19　PD 控制器原理图　　图 6.20　PD 控制器的伯德图

显然，PD 调节器具有相位超前的特性，因而相当于一个超前校正装置，具有前述超前校正装置的特点。PD 控制器使系统增加了一个负的开环零点，会使系统的稳定性及平稳性得到改善；当参数选择适当时，将使系统的调节时间变短；对稳态精度没有影响，但会使系统的高频抗扰能力下降。

微分控制能反映偏差信号的变化趋势，并能在偏差信号值变得太大之前 ，引入修正信号，从而加快系统的控制作用。但在实际的控制系统中，单纯采用 PD 控制器的系统较少，尤其是在时间常数较小的系统的中，如流量控制系统，其原因有两方面，一是纯微分环节在实际中无法实现，二是若采用 PD 控制器，则系统各环节中的任何扰动均将对系统的输出产生较大的波动，尤其对阶跃信号，因此也不利于系统动态性能的真正改善。

5. 比例-积分-微分调节器

比例-积分-微分调节器，简称 PID 调节器。一种由运算放大器构成的 PID 控制器如图 6.11 所示。其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{-U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1 // \frac{1}{C_1 s}} = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{\tau s}$$

$$=\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau}\left[1+\frac{1}{(\tau_1+\tau_2)s}+\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}s\right]$$

$$=K_p\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right) \tag{6-29}$$

其中 $\tau_1=R_1C_1$，$\tau_2=R_2C_2$，$\tau=R_1C_2$。由式(6-29)可知，$K_p=\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau}=\frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_1C_2}$，$T_I=\tau_1+\tau_2=R_1C_1+R_2C_2, T_D=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}=\frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1+R_2C_2}$。

相应的伯德图如图6.21所示。

由图可见，PID控制器综合了PD和PI控制器的特点，与PI控制器相比，多了一个负实数零点，因而在改善系统动态性能方面更具优越性。

在低频段，PID控制器中的积分起作用，将使系统对数幅频特性的斜率增加 -20dB/dec，使系统的无静差度提高，从而大大改善了系统的稳态性能。

在中频段，PID控制器中微分部分的超前作用，使系统的相角裕度增加，也使得系统的穿越频率增加，从而使系统的动态性能改善。

在高频段，PID控制器中微分部分的超前校正作用，使系统的高频幅值增加，抗高频干扰的能力降低。但这一点可采用修正控制器结构的办法来克服。

图6.21 PID控制器的伯德图

实际的PID控制器的传递函数为

$$G_c(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_I s}+\frac{T_D s}{1+s\frac{T_D}{N}}\right) \tag{6-30}$$

式中 N 一般大于10。显然，当 $N\to\infty$ 时，式（6-30）即为理想的PID控制器。

综上所述，PID控制器是一种有源的滞后-超前校正装置，且在实际控制系统中有着最广泛的应用。当系统模型已知时，可采用滞后-超前校正的设计方法。若系统模块未知或不准确，则可用其他方法进行设计。

【思考题】 简述P、PD、PI、PID控制器的特点。

6.3 用频率法设计校正网络

用频率响应法进行串联校正设计，常用的校正装置设计方法有分析法和综合法两种。

分析法又称试探法，用此法比较直观，物理上易于实现，但要求设计者具有一定的工程设计经验，设计过程带有试探性。

综合法又称期望特性法，是工程常用的一种设计方法。它从闭环系统性能与开环系统性能密切相关这一概念出发，根据规定的性能指标要求确定系统期望的开环对数频率

特性形状，然后与系统的原开环对数频率特性相比较，从而确定校正方式、校正装置的形式和参数。这一内容将在6.4节讲述。

6.3.1 用伯德图设计超前校正网络

用频率法对系统进行超前校正的基本原理是：超前校正是利用校正装置的相位超前特性来增加系统的相角稳定裕度，利用校正装置幅频特性曲线的正斜率段来增加系统穿越频率，从而改善系统的平衡性和快速性。为此，要求校正装置的最大超前相位角 φ_m 出现在系统新的穿越频率 ω_c 处。使校正后系统低频段的增益满足稳态精度的要求，中频段对数幅频特性的斜率为 -20dB/dec，并具有较宽的频带，即具有满意的动态性能；高频段幅值迅速衰减，以减少噪声的影响。一般设计步骤如下：

（1）根据系统对稳态性能指标(误差系数)的要求，确定开环增益 K。

（2）根据已确定的增益 K，绘制原系统的伯德图，并确定(也可计算出)未校正系统的相角裕度 γ。

（3）由期望的相角裕度值 γ' 和实际系统的相角裕度 γ，计算超前校正装置应提供的相位超前量 φ_m，即

$$\varphi_m = \gamma' - \gamma + \Delta \tag{6-31}$$

式中 Δ 是用于补偿因超前校正的引入，使系统的穿越频率增大而带来的相位角滞后量。一般地，如果未校正系统的开环幅频特性在穿越频率 ω_c 处的斜率为 -40dB/dec，Δ 取值为5°～12°；如果在 ω_c 处的斜率为 -60 dB/dec，则 Δ 取值为15°～20°。

（4）根据所确定的 φ_m，利用式(6-10)计算出 α 值。

（5）确定未校正系统的幅值等于 $-10\lg\alpha$ 相应的频率 ω_m，此频率上将产生最大相角 φ_m，选此频率作为新的剪切频率 ω_c'。

这样做的理由是，由图6.3(超前校正装置伯德图)知，超前校正装置在 ω_m 处的对数幅频值为

$$L(\omega_c) = \frac{20\lg\alpha}{2} = 10\lg\alpha \tag{6-32}$$

若在 $L_0(\omega)$ 上找到幅频值为 $-10\lg\alpha$ 的点，并选定该点的频率作为超前校正装置的 ω_m，则在该点处，$L_c(\omega)$ 与 $L_0(\omega)$ 的代数和为0dB，即该点频率既是选定的 ω_m，也是校正后系统的穿越频率 ω_c'。

（6）利用式(6-7)及新的剪切频率决定 T，并由下式确定超前网络的转折频率。

$$\omega_1 = \frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}}, \omega_2 = \frac{1}{T} = \omega_m\sqrt{\alpha} \tag{6-33}$$

（7）画出校正后系统的伯德图，并校验系统的相角裕度 γ 是否满足要求。如不满足要求，则增大 α 值，从步骤(3)开始重新计算。

【例6-1】 某控制系统的单位开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)}$，要求：

（1）单位斜坡输入时，位置输出稳态误差 $e_{ss} \leqslant 0.1$；

（2）开环剪切频率 $\omega_c \geqslant 4.4$，相角裕度 $\gamma \geqslant 50°$；

（3）幅值裕度 $h(\mathrm{dB}) \geqslant 17\mathrm{dB}$，试设计串联超前校正网络 $G_c(s)$。

解：（1）根据稳态误差要求确定开环增益 K。

这是Ⅰ型系统，对单位斜坡信号有有限跟踪误差，于是有

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{K}\leqslant 0.1,\ K\geqslant 10$$

取 $K=10$。

(2) 绘制原系统的伯德图如图6.22所示，确定相角裕度 γ(可通过计算求取)。

$$20\lg\frac{10}{\omega_c^2}=0,\ \omega_c=\sqrt{10}\approx 3.16\text{rad/s}$$

$$\gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan 3.16=90^\circ-72.4^\circ\approx 17.5^\circ$$

显然不满足要求。

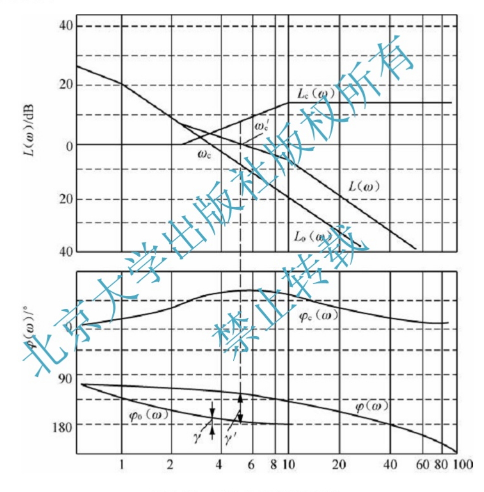


图6.22 例6-1系统的伯德图

(3) 根据性能指标要求的相角裕度 γ 和实际的相角裕度 γ，确定最大超前相角 φ_m，即

$$\varphi_m=\gamma'-\gamma+\Delta=50^\circ-17.5^\circ+5.5^\circ=38^\circ$$

其中 Δ 取 5.5°。

(4) 由式(6-10)求得

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=\frac{1+\sin 38^\circ}{1-\sin 38^\circ}=4.2$$

(5) 超前校正装置在 ω_m 处的对数幅频值

$$L(\omega_c)=10\lg\alpha=10\lg4.2=6.2$$

在原系统幅频特性曲线上找到 −6.2dB 处，或计算得到对应的频率 ω_m，即为 ω_c'。

$$L_0(\omega_m)=20\lg\frac{10}{\omega_m\cdot\omega_m}=-6.2$$

解得 $\omega_m=4.5\text{rad/s}>4.4\text{rad/s}$，满足开环剪切频率要求。

(6) 计算超前校正装置的转折频率

$$\omega_2=\frac{1}{T}=\omega_m\sqrt{\alpha}=4.5\sqrt{4.2}\approx9.2$$

因而可以算出 $T=\frac{1}{9.2}\approx0.108$，$\alpha T=4.2\times0.108\approx0.455$。

另一转折频率 $\omega_1=\frac{1}{\alpha T}=\frac{1}{0.455}\approx2.2$。所以校正装置的传递函数为 $G_c(s)=\frac{1+0.455s}{1+0.108s}$。校正装置的伯德图如图 6.22 中的 $L_c(\omega)$ 和 $\varphi_c(\omega)$ 所示。

(7) 校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{10(0.455s+1)}{s(s+1)(0.108s+1)}$$

校正后系统的伯德图如图 6.22 中的 $L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 所示，校正后系统的相角裕度为

$$\begin{aligned}\gamma'&=180°+\arctan0.455\times4.5-90°-\arctan4.5-\arctan0.108\times4.5\\&=90°+63.97°-77.47°-25.92°\\&\approx51°\end{aligned}$$

幅值裕度 $K_g=\infty>17\text{dB}$，满足设计要求。

【例 6−2】 系统结构图如图 6.23 所示。指标要求：单位斜坡作用下系统的 $e_{ss}\leqslant0.1$，超调量 $\sigma\%\leqslant27.5\%$，调节时间 $t_s\leqslant1.6$。试确定校正装置的传递函数 $G_c(s)$。

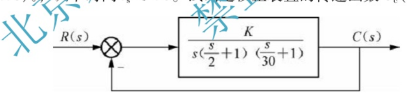


图 6.23　例 6−2 的系统结构图

解：(1) 首先将时域指标转换为频域指标。

$$\begin{cases}\sigma\%\leqslant27.5\%\\t_s\leqslant1.6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M_r=4\sigma\%^2+1\\t_s=\dfrac{8}{\omega_c'}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M_r\leqslant1.3025\\\omega_c'\geqslant5\end{cases}$$

由 $M_r=\frac{1}{\sin r}$得：$r'=\arcsin\frac{1}{M_r}\geqslant50°$

(2) 确定系统的开环增益 K。

系统的开环传函 $G(s)=\dfrac{K}{s\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{30}+1\right)}$，系统为 Ⅰ 型，由 $e_{ss}=\frac{1}{K}\leqslant0.1$，取 $K=10$。

(3) 作 $L_0(\omega)$ 曲线。

系统的 $L_0(\omega)$ 曲线如图 6.24 所示。

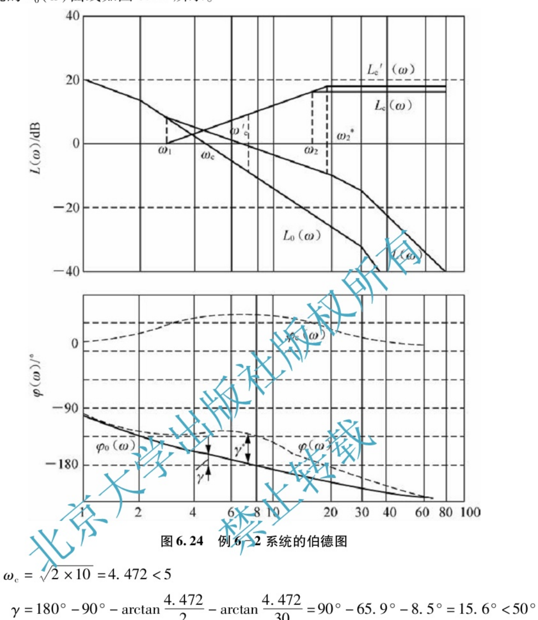


图 6.24 例 6-2 系统的伯德图

$$\omega_c = \sqrt{2\times 10} = 4.472 < 5$$

$$\gamma = 180° - 90° - \arctan\frac{4.472}{2} - \arctan\frac{4.472}{30} = 90° - 65.9° - 8.5° = 15.6° < 50°$$

显然不满足要求，设计超前校正装置进行补偿。

（4）确定超前网络参数。

$$\varphi_m = \gamma' - \gamma + 10° = 50° - 15.6° + 10° = 44.4°$$

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 5.66 \approx 6$$

$$10\lg\alpha = 7.8$$

在 $L_0(\omega)$ 上找到 -7.8dB 对应的频率 ω_m，作为校正后系统的截止频率 ω_c'，或计算

$$20\lg\frac{10}{\omega_m \cdot 0.5\omega_m} = -7.8,\quad \omega_c' = \omega_m = 7 > 5$$

校正装置的转折频率为 $\omega_2 = \frac{1}{T} = \omega_m\sqrt{\alpha} = 7\sqrt{6} = 17$，$T = \frac{1}{17} = 0.059$，$\alpha T = 6\times 0.059 = 0.354$，

$\omega_1=\dfrac{1}{\alpha T}=\dfrac{1}{0.354}\approx 2.8$。

校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+\dfrac{s}{2.8}}{1+\dfrac{s}{17}}$$

校正后的系统传递函数为

$$G'(s)=G(s)G_c(s)=\frac{10\left(1+\dfrac{s}{2.8}\right)}{s\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{17}+1\right)\left(\dfrac{s}{30}+1\right)}$$

(5) 验算。

$$K_v=K=10$$
$$\omega_c'=\omega_m=7>5$$
$$\gamma'=180°+\tan^{-1}\frac{7}{2.8}-90°-\tan^{-1}\frac{7}{2}-\tan^{-1}\frac{7}{17}-\tan^{-1}\frac{7}{30}$$
$$=90°+68°-74°-22.4°-13.1°=48.5°<50°$$

只差1.5°，取 $\omega_2^*=19$，其他参数不变，则此时系统的相角裕度为

$$\gamma^*=\gamma'+\arctan\frac{7}{17}-\arctan\frac{7}{19}=48.5°+22.4-20.2°=50.7°>50°$$

满足性能指标要求，所以选定 $G_c(s)=\dfrac{1+\dfrac{s}{2.8}}{1+\dfrac{s}{19}}$ 为所求的校正装置，校正后的系统开环传递函数为

$$G'(s)=G(s)G_c(s)=\frac{10\left(1+\dfrac{s}{2.8}\right)}{s\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{17}+1\right)\left(\dfrac{s}{30}+1\right)}$$

由此可以看出,串联超前校正有如下特点:

(1) 这种校正主要对未校正系统中频段的频率特性进行校正，使校正后中频段幅值的斜率为 −20dB/dec，且有足够大的相角裕度。

(2) 超前校正会使系统瞬态响应的速度变快。由例6−1可知，校正后系统的剪切频率由未校正前的3.16增大到4.5。这表示校正后系统的频带变宽，瞬态响应的速度变快；但系统抗高频噪声的能力也变差。

(3) 超前校正很难使原系统的低频特性得到改善，若想用提高增益的办法使低频段上移，则由于整个幅频特性曲线上移，将使系统的平稳性变差，抗高频噪声的能力也将变差。

(4) 虽然超前校正一般能较有效地改善系统的动态性能，但当未校正系统的相频特性曲线在剪切频率 ω_c 附近急剧地下降时，若用单级的超前校正网络去校正，收效不大。因为校正后系统的剪切频率向高频段移动。在新的剪切频率处，由于未校正系统的相角

滞后量过大，因而用单级的超前校正网络难于获得较大的相角裕度。此时可采用多级串联校正。

此外，在设计超前校正装置时，应当注意：

(1) 当 ω_c'是一个确定值(不能大也不能小) 时，则以 ω_c'确定 α。

(2) 当设计出的系统 γ'只差一点时，适当增大 ω_2 的值即可。

(3) 当 γ'达不到要求时(差得较远)，一般要求重新确定 α 和 $10\lg\alpha$。

(4) 一级超前网络最大超前角为60°左右，当要求增加的相角太大或 ω_c'附近原系统相角下降太厉害时，不适合使用超前校正。

(5) 超前校正的效果：$\gamma'\uparrow$，$\omega_c'\uparrow$。当 γ、ω_c 均达不到时，可考虑用之。但原系统噪声影响较严重时，不适用此方法。

6.3.2 用伯德图设计滞后校正网络

由于滞后校正网络具有低通滤波器特性，因而当它与系统的不可变部分 $G_0(s)$ 串联时，对频率特性的低频段影响甚微，但会使系统开环频率特性的中频和高频段增益降低，剪切频率 ω_c 减小，从而有可能使系统获得足够大的相角裕度。由此可见，滞后校正在一定的条件下，也能使系统同时满足动态和静态性能的要求。

不难看出，滞后校正的不足之处是，校正后系统的剪切频率 ω_c会减小，频带变窄，瞬态响应速度变慢；同时，在剪切频率 ω_c 处，滞后校正网络会产生一定的相角滞后量。为此，应尽可能地减少滞后角。理论上可选取 $G_c(s)$的两个转折频率 ω_1、ω_2 比 ω_c 越小越好，但考虑到物理实现上的可行性，一般取 $\omega_2=1/T=\omega_c/5\sim\omega_c/10$ 为宜。

根据上述分析，用频率法对系统进行滞后校正的一般步骤如下：

(1) 根据给定静态误差系数的要求，计算系统的开环增益 K。并画出未校正系统的伯德图，求出相应的相角裕度和幅值裕角。

(2) 如果原系统的相角裕度不满足要求，则在已作出的相频曲线上寻找一个频率点，要求在该点处的开环频率特性的相角为 $\varphi=-180°+\gamma'+\Delta$。

以这一频率作为校正后系统的剪切频率 ω_c'。上式中，γ'为系统所要求的相角裕度，Δ 是补偿因滞后网络的引入而在剪切频率 ω_c'处产生的相位滞后量，工程上可取 $\Delta=5°-15°$。

(3) 量得未校正系统在 ω_c'处的幅值 $L_0(\omega_c')$，并设 $L_0(\omega_c')=-20\lg\beta$，由此确定滞后网络的 β 值。理由是滞后校正装置在其转折频率后的对数幅值为 $20\lg\beta$，若未校正系统在 ω_c'处的幅值 $L_0(\omega_c')=-20\lg\beta$，则校正后系统在此处的幅值为0dB。

(4) 为避免 φ_m 出现在 ω_c'附近而影响系统的相角裕度，应使校正装置的转折频率远小于 ω_c'，所以一般取滞后校正网络中的转折频率为

$$\omega_2=\frac{1}{\beta T}=\left(\frac{1}{5}\sim\frac{1}{10}\right)\omega_c' \tag{6-34}$$

另一个转折频率为

$$\omega_1=\frac{1}{T}=\beta\cdot\frac{1}{\beta T}=\beta\omega_2 \tag{6-35}$$

做出滞后校正环节的伯德图。

(5) 画出校正后系统的伯德图，并求出校正后系统的相角裕度。校核设计指标，如果相位不满足要求，但与期望值相差不大时，则可通过减小 ω_2(其他参数不变)，重新设

计滞后校正网络。

【例6-3】 设一单位反馈系统的开环传递函数为$G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$，要求设计一串联滞后校正装置，使系统静态速度误差系数$K_v \geqslant 5s^{-1}$，相角裕度不低于40°，幅值裕度不小于10dB。

解：（1）确定未校正系统的开环增益K。原系统为Ⅰ型系统，所以有$K_v=K \geqslant 5s^{-1}$，取$K=5$（不易取太大），则未校正系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

（2）画出未校正系统的伯德图，如图6.25中的$L_0(\omega)$及$\varphi_0(\omega)$所示。显然，幅频特性曲线以-40dB/dec斜率穿越0dB线，相角裕度$\gamma=-20°$，说明该系统不稳定。

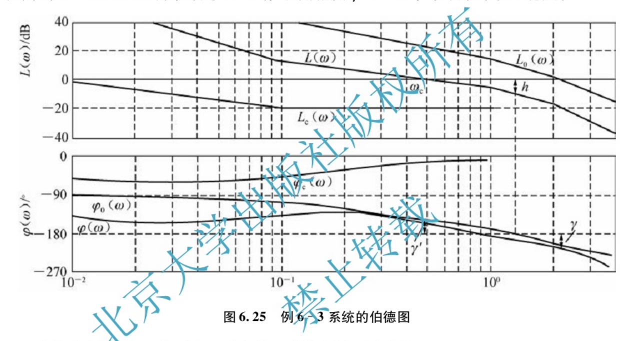


图6.25 例6-3系统的伯德图

（3）根据$\gamma' \geqslant 40°$的要求，并考虑一定的余量，因此有

$$\varphi=-180°+\gamma'+\Delta=-180°+40°+12°=-128°$$

在$\varphi_0(\omega)$上找出相应于这个相角的频率$\omega=0.5$，将其做为校正后系统的穿越频率ω_c'，即$\omega_c'=0.5$。

或计算：

$$-90°-\arctan\omega-\arctan 0.5\omega=-128°$$

$$\arctan\omega+\arctan 0.5\omega=38°$$

$$\frac{\omega+0.5\omega}{1-\omega\times 0.5\omega}=\tan 38°=0.78$$

解得$\omega_c'=\omega=0.5$。

（4）由$L_0(\omega)$曲线得知$L_0(\omega_c')=20\text{dB}$。

也可计算$L_0(\omega_c')=20\lg\dfrac{5}{0.5\sqrt{0.5^2+1}\times\sqrt{(0.5\times0.5)^2+1}}\approx 20\text{dB}$，于是设

$$L_0(\omega_c')=20\text{dB}=-20\lg\beta$$

可求得$\beta=0.1$。

（5）计算校正装置的转折频率，取 $\omega_2=\frac{1}{\beta T}=\frac{1}{5}\omega_c'=0.1$，则 $\omega_1=\frac{1}{T}=\beta\cdot\frac{1}{\beta T}=0.01$。由此可得校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{10s+1}{100s+1}$$

其伯德图如图6.25中的 $L_c(\omega)$ 及 $\varphi_c(\omega)$ 所示。

（6）校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{5(10s+1)}{s(0.5s+1)(s+1)(100s+1)}$$

其伯德图如图6.25中的 $L(\omega)$ 及 $\varphi(\omega)$ 所示。由图或计算可知，校正后系统的相角裕度 $\gamma=40°$，满足要求。

验证 h'：求 $L(\omega)=-10\text{dB}$ 处的频率 ω_g，然后计算，若 $\varphi(\omega_g)>-180°$，即可证明 $h'>10\text{dB}$。由 $20\lg\frac{5\times10\omega_g}{\omega_g\times1\times\omega_g\times100\omega_g}=-10$，求出 $\omega_g=1.26$。

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_g)&=\arctan10\times1.26-90°-\arctan0.5\times1.26-\arctan1.26-\arctan100\times1.26\\&=85.46°-90°-32.21°-51.56°-89.54°=-177.85°>-180°\end{aligned}$$

所以 $h'>10\text{dB}$，满足系统设计要求。

综上所述，串联滞后校正有如下特点：

（1）滞后校正是利用其高频衰减作用，使校正后系统剪切频率 ω_c' 前移，从而达到增大相角裕度，改善系统稳定性的目的，但这是以牺牲系统的快速性为代价的。

（2）一般地，滞后校正不改变原系统的最低频段的特性，即不影响系统的无差度。但由于稳定裕度的增加和高频幅值的衰减，使得系统有裕度允许增加开环增益，从而改善系统的稳态精度。

（3）滞后校正一般适合于穿越频率有余，而相位不足且用一级超前校正补不起来的场合。

6.3.3 用伯德图设计滞后-超前校正

如果未校正系统不稳定，或对校正后系统的动态和静态性能均有较高的要求时，只采用上述的超前校正或滞后校正，难于达到预期的校正效果。此时，宜对系统采用串联滞后-超前校正。

应用频率法设计滞后-超前校正装置，实质是利用校正装置的超前部分来增大系统的相角裕度，以改善动态性能；利用滞后部分来改善系统的稳态性能。采用这种校正方式，应合理应用滞后和超前校正各自的优点，克服它们各自的弱点，经多次试探才能成功。

【例6-4】 设一单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$，要求校正后的系统满足以下性能指标：相角裕度 $\gamma'=50°$，幅值裕度 $h'\geq10\text{dB}$，静态速度误差系数 $K_v\geq10$，穿越频率 $\omega_c'\geq1.2\text{rad/s}$，试设计超前-滞后校正装置。

解：（1）根据对静态误差的要求确定系统的开环增益 K，取 $K=K_v=10$。

（2）绘制未校正系统的伯德图，如图6.26中的 $L_0(\omega)$ 及 $\varphi_0(\omega)$ 所示。从图中可看出系统的穿越频率 $\omega_c=2.7$，相角裕度 $\gamma=-33°$，系统不稳定。

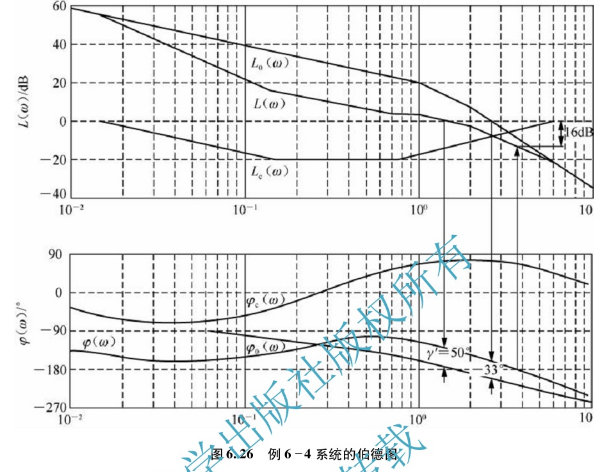


图 6.26　例 6-4 系统的伯德图

（3）选择校正后的截止频率 ω_c'。若性能指标中对系统的快速性未提出明确要求，一般对应 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=-180°$ 的频率作为 ω_c'，ω_c' 取值小，降低了对超前部分的要求，但也降低了快速性。反之，ω_c' 取值大时，则需要更大的超前相角，难以实现。从图中可以看出，选择 $\omega_c'=1.5$，未校正系统的相角裕度为 0°，与要求值相差 50°，这样的超前相角通过滞后-超前校正装置是容易实现的。

（4）确定超前校正参数 α：α 由超前部分产生的超前相角 φ_m 而定，如取 $\varphi_m=55°$，则有

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=\frac{1+\sin55°}{1-\sin55°}\approx10$$

（5）确定滞后校正部分的传递函数。为了减小滞后校正部分的相位滞后对相角裕度的不利影响，一般取 $\frac{1}{T_1}=\frac{1}{10}\omega_c'=0.15$，即 $T_1=\frac{1}{0.15}\approx6.67$。这样可使滞后相角控制在 $-5°$ 以内，$\frac{1}{\alpha T_1}=0.015$，即 $\alpha T_1=66.7$。因此滞后部分的传递函数为 $G_{c1}(s)=\frac{1+6.67s}{1+66.7s}$。

（6）确定超前部分的传递函数。过$(\omega_c',\ -20\lg|G(\mathrm{j}\omega_c')|)$做一斜率为 20dB/dec 直线，由该直线与 −20dB 和 0dB 水平线的交点坐标就可确定校正装置超前部分的转折频率。

由图可见，未校正系统在 $\omega_c'=1.5$ 处的增益为 13dB，因此，要求校正装置在该处产生 −13dB 的增益。过点（1.5，−13dB）做斜率为 20dB/dec 直线，得到两个交点的横坐

标分别为0.7和7，即为超前部分的两个转折频率。由$\frac{1}{T_2}=0.7$，可得$T_2=1.43$；$\frac{\alpha}{T_2}=7$，可得$\frac{T_2}{\alpha}=0.143$。因此校正装置超前部分的传递函数为$G_{c2}(s)=\frac{1+1.43s}{1+0.143s}$。

（7）滞后-超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)=\frac{(1+6.67s)(1+1.43s)}{(1+66.7s)(1+0.143s)}$$

对应的伯德图如图6.26中的$L_c(\omega)$及$\varphi_c(\omega)$所示。

（8）校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{10(1+6.67s)(1+1.43s)}{s(1+66.7s)(1+0.143s)(s+1)(0.5s+1)}$$

校正后系统的伯德图如图6.26中的$L(\omega)$及$\varphi(\omega)$所示。由图可见，校正后相角裕度$\gamma'=50°$，幅值裕度$h'=16\text{dB}>10\text{dB}$，静态速度误差系数$K_v=10$，穿越频率$\omega_c'=1.5\text{rad/s}>1.2\text{rad/s}$，均满足设计要求。

6.4 控制系统的工程设计

6.4.1 自动控制系统设计的一般过程

控制系统的设计一般按以下步骤进行：

（1）根据系统的结构和参数，确定系统固有部分的数学模型。

（2）对系统固有部分的方框图进行近似处理与简化，并在此基础上，求得系统固有部分的频率特性。

（3）根据实际系统的使用要求，确定系统的稳态和动态性能指标；再根据性能指标的要求，确定系统的预期频率特性。

（4）将系统固有部分的频率特性和预期频率特性进行比较，确定校正装置的结构与参数。

（5）通过实验或现场调试对系统的某些部分的结构和参数进行修正，以满足性能指标的要求。

由此可见，自动控制系统的工程设计实际上是在受控对象、基本控制元件和控制方案均已确定的情况下对校正装置的计算和选择，确定一种既能使系统符合性能指标要求又比较简单的校正装置。

由于一般系统的数学模型和性能指标的定量关系很难建立，所以理论设计采取的办法是预先规定一些反馈系统的参考模型，如Ⅰ型、Ⅱ型以及典型低级系统。对这些模型进行研究，把它们的开环频率特性做为预期的频率特性，将它们的参数与性能指标间的关系用简单的公式或图表表示出来，然后在设计一个实际系统时，可对系统固有部分做必要的简化，再将其校正成某种典型系统的形式。这样就可以利用现有的公式或图表来进行参数计算，使设计过程大大简化。

【思考题】 设计自动控制系统的一般过程是什么？

6.4.2　系统固有部分的简化

实际系统的数学模型往往比较复杂，给分析和设计带来不便。因此需要对固有部分的数学模型进行适当的简化处理。常用的近似处理方法有以下几种。

1. 线性化处理

实际上，所有的元件和系统都不同程度地存在非线性性质。而非线性元件或系统的数学模型的建立和求解都比较困难。因此，在满足一定条件的前提下，常将非线性元件或系统近似看作线性元件或系统，相应地，即可用线性数学模型近似代替非线性模型。

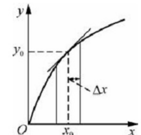


图 6.27　非线性特性的线性化

设某一非线性元件的输入为 x，输出为 y，二者之间的关系如图 6.27 所示，相应的非线性方程为

$$y=f(x) \tag{6-36}$$

由第 2 章的分析可知，当其工作在给定工作点$(x_0,\ y_0)$附近时，可近似写成

$$\Delta y=K\Delta x \tag{6-37}$$

式中 Δx 为 x 在$(x_0,\ y_0)$附近的增量，$\Delta y=y-f(x_0)$，$K=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$。

式(6-37)就是式(6-36)的线性化方程。系统中常用的元器件，如晶闸管整流装置、具有饱和特性的放大器、节流装置等，都可以近似处理成线性环节。

2. 大惯性化环节的近似处理

设系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \tag{6-38}$$

其中 $T_1 \gg T_2$，$T_1 \gg T_3$。此时可将大惯性环节近似处理成积分环节，即

$$G(s)\approx\frac{K}{T_1s(T_2s+1)(T_3s+1)} \tag{6-39}$$

从稳态性能看，这样的处理相当于人为地把系统的型别提高了一级，不能真实反映系统稳态精度。故这样的近似只适合于动态性能的分析与设计，考虑稳态精度时，仍应采用原来的传递函数。

3. 小惯性环节的近似处理

当小惯性环节比大惯性环节的时间常数小很多时，在一定条件下，可将小惯性环节忽略不计，例如

$$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\approx\frac{K}{(T_2s+1)}\quad(T_1 \ll T_2) \tag{6-40}$$

4. 小惯性群的近似处理

在自动控制系统中，经常有多个小时间常数的惯性环节相串联（称为小惯性群）的情况，在一定条件下，可将这些小惯性环节合并为一个惯性环节。例如

$$G(s)=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)\cdots(T_ns+1)}$$
$$\approx\frac{1}{(T_1+T_2+T_3+\cdots+T_n)s+1} \quad (6-41)$$

式中 T_1，T_2，T_3，…，T_n均为小时间常数。

5. 高阶系统的降阶处理

在高阶系统中，若 s 高次项的系统比其他项的系数小得多，则可略去高次项。例如

$$G(s)=\frac{K}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}\approx\frac{K}{a_2s^2+a_3s+a_4} \quad (6-42)$$

式中 $a_1 \ll a_2$，$a_1 \ll a_3$，$a_1 \ll a_4$。这样可以将一个高阶系统近似处理成一个低阶系统，从而简化了对系统的分析和设计过程。

6.4.3 预期频率特性及参考模型

预期频率特性一般可分为低频段、中频段和高频段三个频段，如图 6.28 所示。

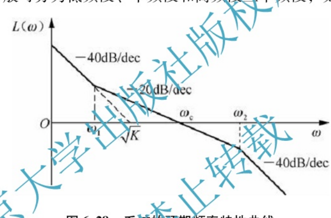


图 6.28 系统的预期频率特性曲线

(1) 低频段。由系统型别和开环增益所确定，表明了系统的稳态性能。所以低频段要有一定的斜率和高度，以保证系统的稳态精度。一般取斜率为 -20dB/dec 或 -40dB/dec。

(2) 中频段。指穿越频率 ω_c 附近的区域。中频段的穿越频率 ω_c 应适当大些，以提高系统的响应速度。中频段的斜率一般以 -20dB/dec 为宜，并要有一定的宽度 h，以保证系统有足够的稳定裕度，使系统具有较高的稳定性。

(3) 高频段。该段的斜率一般取 -60dB/dec 或 -40dB/dec。以使高频干扰信号受到有效的抑制，提高系统抗高频干扰的能力。

由前面第 3 章的时域法分析可知，0 型系统的稳态精度较差，而Ⅲ型以上的系统又很难稳定，因此为了兼顾系统的稳定性和稳态精度的要求。一般地，应根据对控制系统的性能要求将系统设计成典型Ⅰ型或典型Ⅱ型系统。

下面简要介绍这两种典型系统的参考模型。

1. 典型Ⅰ型参考模型

由第 3 章可知，二阶系统的传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

式中 ξ 为阻尼比，ω_n 为自然振荡角频率。

当 $0<\xi<1$ 时，系统的阶跃响应具有衰减振荡的特征。其时域指标和参数 ξ、ω_n 的关系由时域分析法知

超调量 $$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%$$

调节时间 $t_s=\dfrac{3}{\xi\omega_n}\quad(\xi<0.7)$；$t_s=(6.45\xi-1.7)/\omega_n\quad(\xi\geqslant0.7)$

并绘有标准曲线以便查对和换算。

闭环频域指标和参数 ξ、ω_n 的关系由频域分析法知

峰值 $$M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\qquad(\xi\leqslant0.707)$$

峰值频率 $$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\qquad(\xi\leqslant0.707)$$

将上述典型二阶系统看作是单位负反馈系统，则对应的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\xi\omega_n)}=\frac{K}{s(Ts+1)}\tag{6-43}$$

式中 $\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{T}}$，$\xi\omega_n=\dfrac{1}{2T}$，即 $\xi=\dfrac{1}{2\sqrt{KT}}$。

典型Ⅰ型系统的伯德图如图6.29所示。

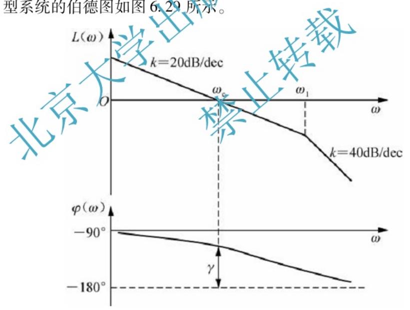


图6.29　典型Ⅰ型系统的伯德图

图中转折频率 $\omega_1=\dfrac{1}{T}=2\xi\omega_n$，穿越频率 $\omega_c=K=\dfrac{\omega_n}{2\xi}$。

显然，为了保证对数幅频特性曲线以 -20dB/dec 的斜率过 0dB 线，必须使 $\omega_c<\dfrac{1}{T}$，即有 $KT<1$。

典型Ⅰ型系统的结构简单，选择参数时，若主要要求动态响应快，可取 $\xi=0.5\sim$

0.6；若主要要求系统的超调量小，可取 $\xi=0.8\sim1.0$；无特殊要求时，一般取 $\xi=0.707$，此时系统略有超调，称为“二阶最佳模型”。二阶系统的性能指标为

$$\begin{aligned}&\sigma\%=4.3\% \qquad t_s\approx\frac{3}{\omega_n} \qquad \gamma=65.5^\circ \qquad M_r=1\\&\omega_c\approx0.707\omega_n \qquad \omega_r=0 \qquad \omega_b=\omega_n \qquad \omega_1=1.414\omega_n=2\omega_c\end{aligned} \tag{6-44}$$

2. 典型Ⅱ型参考模型

典型Ⅱ型系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)} \tag{6-45}$$

式中 T 一般为固有参数，K 和 τ 为需要选定的参数。

典型Ⅱ型系统的伯德图如图6.30所示。要使对数幅频曲线以 -20dB/dec 的斜率过 0dB 线，必须满足 $\frac{1}{\tau}<\omega_c<\frac{1}{T}$，即应有 $\tau>T$。

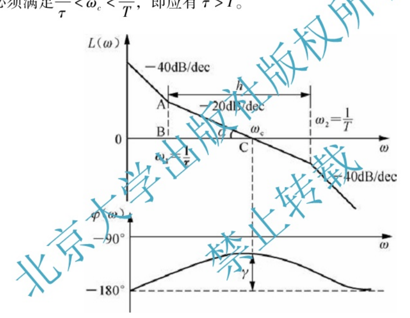


图6.30 典型Ⅱ型系统的伯德图

典型Ⅱ型系统的待定参数有 K 和 τ 两个，选择起来比较麻烦。为此，人们提出了制约 K 和 τ 之间关系的准则，通过准则，将 K 和 τ 与参变量 h 关联起来，使 K 和 τ 成为 h 的函数。这样就只要分析系统性能与 h 间的关系，并依此确定一个 h 值，便可求得相应的 K 和 τ 的数值了。

工程中常用的准则：

(1) $M_r=M_{min}$ 准则，即使得系统闭环幅频特性的谐振峰值 M_r 为最小的准则。

(2) $\gamma=\gamma_{max}$ 准则，即使得系统开环频率特性中的相角裕度为最大的准则。

这两个准则的出发点都是使得系统的平稳性得到最大程序的改善。下面以 $\gamma=\gamma_{max}$ 准则为例来说明这种选取参数的方法。

由式(6-45)推知，系统的相角裕度为

$$\gamma=180^\circ-180^\circ+\arctan\omega_c\tau-\arctan\omega_c T$$

$$= \arctan\omega_c\tau - \arctan\omega_c T \tag{6-46}$$

要使 $\gamma=\gamma_{max}$，可令$\frac{d\gamma}{d\omega_c}=0$，由此求得

$$\omega_c=\sqrt{\frac{1}{\tau T}}=\sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{6-47}$$

显然，ω_c 位于 ω_1 和 ω_2 的几何平均值处。将式(6-47)代入式(6-46)中可求得最大相角裕度 γ_{max}。

定义中频宽

$$h=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\tau}{T} \tag{6-48}$$

并令其作为参变量。由图 6.30 可知，在 RtΔABC 中，$\tan\alpha=\frac{AB}{CB}=20$，即 $AB=20CB$，而 $AB=20\lg\frac{K}{\omega_1{}^2}$，$CB=\lg\omega_c-\lg\omega_1$，所以有 $20\lg K-20\lg\omega_1^2=20(\lg\omega_c-\lg\omega_1)$，即有

$$K=\omega_1\omega_c \tag{6-49}$$

考虑到式(6-47)～式(6-49)，可得

$$K=\omega_1\omega_c=\omega_1\sqrt{\omega_1\omega_2}=\frac{1}{T^2h\sqrt{h}} \tag{6-50}$$

由式(6-48)和式(6-50)可见，由 $\gamma=\gamma_{max}$ 准则出发，可将 K 和 τ 两个参数的确定转化成 h 的选择。

对于不同的 h 值，系统的输出响应也将不同，对应的动态指标亦不一样。表 6-1 给出了典型Ⅱ型系统在不同中频宽 h 时的跟随性能指标。

表 6-1　典型Ⅱ型系统的跟随性能指标

中频宽 h	2.5	3	4	5	7.5	10
最大超调量 σ%	58%	53%	43%	37%	28%	23%
上升时间 t_r	2.5T	2.7T	3.1T	3.5T	4.4T	5.2T
调节时间 t_s	21T	19T	16.6T	17.5T	19T	26T
相角裕度 γ	25°	30°	37°	42°	50°	55°

典型Ⅱ型系统是三阶系统，对于三阶及以上的系统，其时域指标和频域指标之间没有确定的数学关系。

典型Ⅰ型和典型Ⅱ型系统分别适合于不同的稳态精度要求，此外，典型Ⅰ型系统的超调量较小，但抗扰性能较差；典型Ⅱ型系统的超调量相对大一些，而抗扰性能较好。可根据对控制系统的不同要求来选择确定。

6.4.4　校正装置的设计举例

工程设计方法的基本思路是，根据对系统性能指标的要求，选择预期数学模型，并将系统固有部分的数学模型与预期典型数学模型进行对照，选择校正装置的结构和部分参数，以使系统校正成典型系统的结构形式；然后，再进一步选择和计算校正装置的参数，以满足动态性能指标的要求。同时，由固有部分的对数频率特性获知原系统的频域

性能指标，由校正后系统的对数频率特性得到相应的频域性能指标，并据此来判断设计是否满足要求。下面举例说明。

【例 6-5】 已知系统的固有传递函数为

$$G_0(s)=\frac{40}{s(0.2s+1)(0.01s+1)}$$

试将系统校正成Ⅰ型系统。

解：设系统的结构如图 6.31 所示。

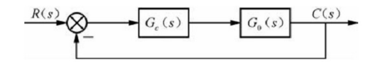


图 6.31 例 6-5 系统结构图

为了将系统校正成Ⅰ型系统，可选择比例微分环节作为校正装置，即

$$G_c(s)=\tau s+1$$

取 $\tau=0.2$，便可消去 $G_0(s)$ 中大时间常数的惯性环节，校正后系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{40}{s(0.2s+1)(0.01s+1)}\times(\tau s+1)=\frac{40}{s(0.01s+1)}$$

系统的伯德图如图 6.32 所示。其中 $L_0(\omega)$ 和 $\varphi_0(\omega)$ 为校正前系统的伯德图，$L'(\omega)$ 和 $\varphi'(\omega)$ 为校正后系统的伯德图。

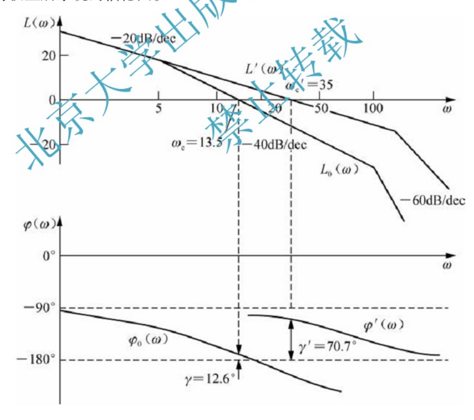


图 6.32 例 6-5 系统伯德图

由图 6.32 可知，校正前 $\omega_c=13.5$，$\gamma=12.6°$；校正后 $\omega_c'=35$,；$\gamma'=70.7°$。

校正后系统的穿越频率提高了，改善了系统响应速度；相角裕度增加了，使系统的稳定性得到改善；校正后系统的幅频特性曲线以 -20dB/dec 斜率穿越 0dB 线，改善了系统的平稳性。

【例 6-6】 某单位反馈系统，校正前系统的开环对数幅频特性 $L_0(\omega)$ 如图 6.33(a)所示，欲采用 PID 校正(见图 6.33(b))使系统成为典型欠阻尼二阶系统，系统的动态性能指标设定为 $\sigma\% = 16.3\%$，$t_s = 0.7s$。

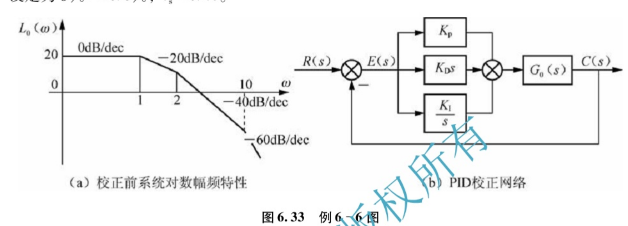


图 6.33　例 6-6 图

(1) 计算校正前系统的截止频率 ω_{c0} 和相角裕度 γ_0；

(2) 确定校正装置中的参数 K_p，K_D，K_I。

解：(1) 由 $L_0(\omega)$ 图知

$$G_0(s) = \frac{10}{(s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

$$\frac{10}{\omega_{c0} \times 0.5\omega_{c0}} = 1 \quad \Rightarrow \omega_{c0} = 4.47$$

$$r_0 = 180° - \arctan 1 \times 4.47 - \arctan 0.5 \times 4.47 - \arctan 0.1 \times 4.47$$
$$= 180° - 77.4° - 65.9° - 24.1° = 12.6°$$

(2) 依题校正后有 $\Phi(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\begin{cases} \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 16.3\% \\ t_s = \dfrac{3.5}{\xi\omega_n} = 0.7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi = 0.5 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

所以有

$$\Phi(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{100}{s(s+10)} = \frac{10}{s(0.1s+1)}$$

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} = \frac{10}{s(0.1s+1)} \times \frac{(s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}{10} = \frac{(s+1)(0.5s+1)}{s}$$

$$G_c(s) = 0.5s + 1.5 + \frac{1}{s} = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

比较得 $K_p = 1.5$，$K_D = 0.5$，$K_I = 1$。

6.5 MATLAB 用于系统校正与设计

本节将运用 MATLAB 语言设计几种校正装置。

1. 超前校正装置的设计

【例 6-7】 试用 MATLAB 对例 6-1 中系统设计超前校正装置。

解：如例 6-1 中所述，校正前系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$，编写 MATLAB 程序如下：

```
num=10; den=[1 1 0];
[gm,pm,wcg,wcp]=margin(num,den);       % 求原系统的相角裕度 pm
dpm=50-pm+5;                           % 根据性能指标确定 φm
phi=dpm* pi/180;                       % 转换成弧度
a=(1+sin(phi))/(1-sin(phi);            % 根据式(6-10)
mm=-10* log10(a);                      % 计算 -10logα 的值 mm
[mu,pu,w]=bode(num,den);               % 获得原系统的幅频特性曲线
mu_db=20*log10(mu);                    % 幅值按 dB 分度
wc=spline(mu_db,w,mm);                 % 在原幅频特性上找到幅值 mm 处的频率 wc
T=1/(wc* sqrt(a));                     % 根据式(6-30)求 T 及 αT
p=a*T;
nk=[p 1]; dk=[T 1];                    % 根据式(6-5)求校正装置
gc=tf(nk,dk);
printsys(nk,dk,'s');
```

可从命令窗口得到校正装置的传递函数为

```
0.4555 s  + 1
……
0.108 s  + 1
```

再输入下面的命令可以得到校正后的系统伯德图和相角裕度。

```
h=tf(num,den); h1=tf(nk,dk);
g=h*h1;                                % 校正后系统传递函数
[num1,den1]=tfdata(g);                 % 转换成多项式形式
bode(num1,den1);                       % 画校正后系统的伯德图
[gm1,pm1,wcg1,wcp1]=margin(g);         % 求校正后的相角裕度 pm1 及截止频率 wcp1
```

则 $\gamma=\text{pm1}=50.6$，$\omega_c'=\text{wcp1}=4.47$ 满足设计要求。

2. 滞后校正装置的设计

【例 6-8】 试用 MATLAB 对例 6-3 中系统设计滞后校正装置。

解：如例 6-3 中所述，校正前系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$，编写 MATLAB 程序如下：

```
num=5; den=[0.5 1.5 1 0];
[gm,pm,wcg,wcp]=margin(num,den);       % 求原系统的相角裕度 pm
dpm=-180+40+12;                        % 根据性能指标确定 φm
```

```
[mu,pu,w] =bode(num,den);                  % 获得原系统的幅频特性曲线
wc =spline(pu,w,dpm);                      % 在未校正特性曲线上找到 φm 对应的 ωc
mu_db =20*log10(mu);                       % 将幅值转换成 dB 分度
m_wc =spline(w,mu_db,wc)                   % 求未校正系统在 ωc 处的幅值
beta =10^(-m_wc/20);                       % 求 β
w2 =0.2*wc;                                % 求滞后校正装置的转折频率 ω2
T =1/(beta*w2);                            % 求 T
nk =[beta*T 1];dk =[T];
h1 =tf(nk,dk);                             % 校正装置的传递函数
printsys(nk,dk,'s');
```

命令窗口可看到滞后校正装置的传递函数为

```
10.76 s + 1
……
102.3 s + 1
```

再输入下面的命令，可得到校正后的传递函数和相角裕度：

```
h =tf(num,den);
g =h* h1;
[num1,den1] =tfdata(g);
bode(num1,den1);                           % 画校正后系统的伯德图
[gm1,pm1,wcg1,wcp1] =margin(g);            % 求校正后的相角裕度 pm1,幅值裕度 gm1
```

则 pm1 =41.51，gm1 =4.9898，即 14dB > 10dB 满足要求。

3. PID 调节器的设计

【例 6 -9】 试用 MATLAB 对例 6 -6 中系统设计滞后校正装置。

解：如例 6 -6 所述，校正前系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{10}{(s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}$，校正后的系统传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，MATLAB 编程如下：

```
syms x y s;
h1 =tf(10,[1 1]);
h2 =tf(1,[0.5 1]);
h3 =tf(1,[0.1 1]);
h =h1*h2*h3;
[num,den] =tfdata(h);                              % 求原系统的传递函数
[gm,pm,wcg,wcp] =margin(num,den);                  % 原系统的相位和截止频率
x =solve('exp(-x*pi/sqrt(1-x^2)) =0.163','x');     % 求校正后的阻尼比 x
y =solve('3.5/x*y =0.7','y');                      % 求校正后的固有频率 y
gb =100/(s^2 +10*s +100);                          % 校正后系统闭环传递函数
g1 =gb*(1-gb)^(-1);
g =simple(g1);                                     % 校正后系统开环传递函数
g0 =10*(s+1)^(-1)*(0.5*s+1)^(-1)*(0.1*s+1)^(-1);
gc1 =g*g0^(-1);
gc =simple(gc1);                                   % 校正装置传递函数 gc
```

将 gc 改写成多项式形式：

```
d2 =[1 0];
d1 =conv(0.5,conv([1 2],[1 1]));
d2 =[1 0];
[q,r] =deconv(d1,d2);
cq ='商是';cr ='余项是';
disp([cq,poly2str(q,'s')]),disp([cr,poly2str(r,'s')])
```

在命令窗口出现商和余项的表达式：

```
商是  0.5s +1.5
余项是  1
```

由此可知校正装置的传递函数为 $G_c(s)=0.5s+1.5+\dfrac{1}{s}$，所以 $K_p=1.5$，$K_D=0.5$，$K_I=1$。

小　结

为了使系统性能满足要求，常须在系统中附加一些装置，改变系统的结构和参数，从而改变系统的性能。这种措施称之为系统的校正，所引入的装置称为校正装置。系统中除校正装置外的部分称为系统的固有部分。控制系统的校正也应根据系统的固有部分和对性能指标的要求，确定校正装置的结构参数。

按照校正装置在系统中的连接方式，可将校正的方法分为串联校正、反馈校正和复合校正。根据校正原理的不同，又可将串联校正分为超前校正、滞后校正和滞后-超前校正。另外，根据校正装置所采用的器件不同，又可分为无源校正和有源校正。

串联超前校正是利用校正装置的超前相位，增加系统的相角裕度，改善系统的稳定性；由于校正之后系统对数幅频曲线斜率的改变，使得其穿越频率增大，从而提高了系统的快速性，但降低了系统的抗高频干扰的能力。若原系统需补偿的相角太大，则一般的超前校正装置难以收到较好的效果。PD 调节器就是一种超前校正装置。

串联滞后校正是利用校正装置的高频幅值衰减特性，以减小系统穿越频率为代价，使系统的相角裕度增加，系统抗高频干扰的能力也得到加强；另外，滞后校正没有改变原系统最低频段的特性，往往还允许增加开环增益，从而可改善系统稳态精度。PI 调节器是工程上常用的一种滞后校正装置，而且由于积分环节的引入，可提高系统的无静差度，改善系统的稳态性能。

滞后-超前校正综合了滞后和超前的优点，利用校正装置的超前部分改善系统的动态性能，利用滞后部分改善系统的稳态精度。PID 调节器就是工程上常用的一种滞后-超前校正装置。

控制系统工程设计的主要思路是，根据对系统性能指标的要求，选择确定预期典型数学模型。根据系统固有部分的数学模型与预期典型数学模型对照，选择校正装置的结构和部分参数，以使系统校正成典型系统的结构形式；然后再进一步选择校正装置的参数，以满足系统动态性能指标的要求。

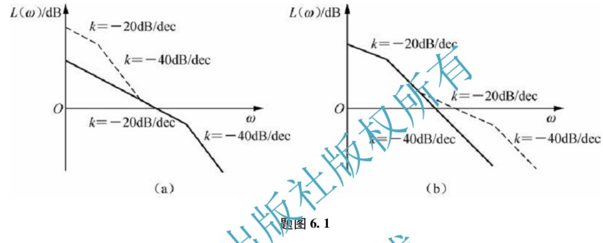
习　题

1. 在题图6.1(a)、(b)中，实线分别为两个最小相位系统的开环对数幅频特性曲线，图中虚线部分表示采用串联校正后系统的开环对数幅频特性曲线改变后的部分，试问：

(1) 串联校正有哪几种形式?

(2) 试指出题图6.1(a)、(b)分别采取了什么串联校正方法?

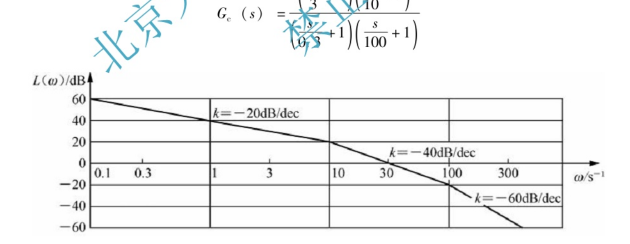
(3) 题图6.1(a)、(b)所采取的校正方法分别改善了系统的什么性能?



题图6.1

2. 单位反馈系统的开环对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$ 如题图6.2所示，采用串联校正，校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.3}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$



题图6.2

(1) 写出校正前系统的传递函数 $G_0(s)$；

(2) 在图中绘制校正后系统的对数幅频特性曲线 $L(\omega)$；

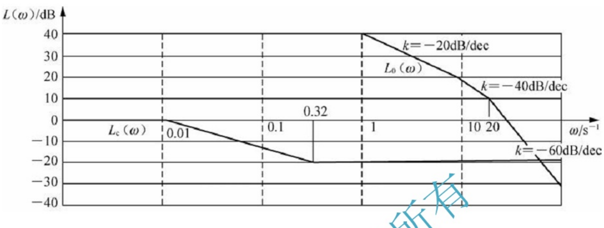
(3) 求校正后系统的截止频率 ω_c 和 γ。

3. 已知最小相位系统的开环对数幅频特性 $L_0(\omega)$ 和串联校正装置的对数幅频特性 $L_c(\omega)$ 如题图6.3所示。

(1) 写出原系统的开环传递函数 $G_0(s)$，并求其相角裕度；

(2) 写出校正装置的传递函数 $G_c(s)$；

(3) 画出校正后系统的开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$，并求其相角裕度。



题图 6.3

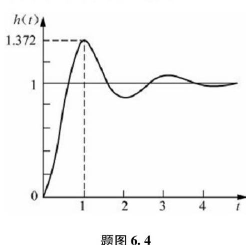
4. 已知某单位负反馈开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{500K_0}{s(s+5)}$，试采用超前校正，使校正后系统速度误差系统 $K_v=100$，相角裕度 $\gamma\geqslant45°$。

5. 某单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$，采用串联校正改善系统性能，校正装置的传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{K_c(10Ts+1)}{(Ts+1)}$，要求校正后系统的截止频率 $\omega_c'=1$，相角裕度 γ' 达到最大。试确定：

(1) 校正装置传递函数中的参数 K_c、T。

(2) 校正后系统在 $r(t)=t^2$ 作用下的稳态误差 e_{ss}。

6. 某单位反馈的典型二阶系统的单位阶跃响应如题图 6.4 所示。



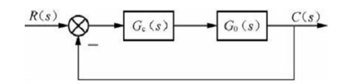
题图 6.4

(1) 确定系统的开环传递函数，画出系统的结构图；

(2) 用适当的校正方式，并调整开环增益，使系统超调量 $\sigma\%=16.3\%$，调节时间 $t_s=1s$；

(3) 试画出校正后系统的结构图，确定校正装置的传递函数和系统的开环增益。

7. 系统结构图如题图6.5所示，被控对象的传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$。



题图 6.5

(1) 当 $G_c(s)=1$ 时，若要求系统的静态误差系数 $K_v=100$，试判断系统此时是否稳定？

(2) 令 $K=100$，为使系统获得大于30°的相角裕度，采用校正装置 $G_c(s)=\dfrac{0.05s+1}{0.005s+1}$。试验证校正后系统是否满足要求。

8. 一单位负反馈最小相位系统开环相频特性为 $\varphi(\omega)=-90°-\arctan\dfrac{\omega}{2}-\arctan\omega$。

(1) 求相角裕度为30°时系统的开环传递函数；

(2) 在不改变穿越频率的前提下，试选择参数 K_c 和 T，使系统在加入串联校正环节 $G_c(s)=\dfrac{K_c(Ts+1)}{s+1}$ 后，系统的相角裕度提高到60°。

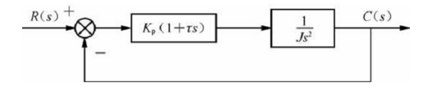
9. 设未校正系统开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$，要求校正后系统的相角裕度 $\gamma=65°$，幅值裕度 $K_g=6\text{dB}$，求串联滞后校正装置。

10. 某典型二阶系统 $\omega_{c0}=1$，$\gamma=45°$ 希望通过串联校正成为超调量 $\sigma\%=4.3\%$，$t_s=0.7s$，的典型二阶系统。

(1) 试确定满足条件的校正装置传递函数 $G_c(s)$，绘制其特性曲线 $L_c(\omega)$，指出所采用的校正方式；

(2) 依照三频段理论简要说明校正对系统性能产生的影响。

11. 某比例-微分控制系统如题图6.6所示，试分析PD控制器对系统性能的影响。

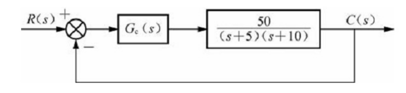


题图 6.6

12. 已知某一控制系统如题图6.7所示，其中 $G_c(s)$ 为PID控制器，它的传递函数为

$$G_c(s)=K_p+\frac{K_I}{s}+K_D s$$

要求校正后系统闭环极点为 $-10\pm j10$ 和 -100，确定PID控制器的参数 K_p、K_I 和 K_D。

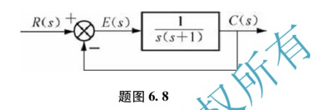


题图 6.7

13. 某Ⅰ型二阶系统结构图如题图6.8所示。

(1) 计算系统的速度稳态误差 e_{ss} 和相角裕度 γ。

(2) 采用串联校正方法，使校正后系统仍为Ⅰ型二阶系统，速度稳态误差减小为校正前的十分之一，相角裕度保持不变，确定校正装置传递函数。



题图 6.8

14. 已知单位的典型二阶系统在 $r(t)=\sin 2t$ 作用下的稳态输出响应为 $c_0(t)=2\sin(2t-90°)$，欲采用串联校正，使校正后系统仍为二阶系统，并且同时满足条件：

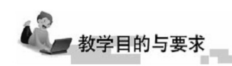
$$\begin{cases} r(t)=t \\ \sigma\%=16.3\% \end{cases} \text{作用时，系统的稳态误差 } e_{ss}=0.25。$$

(1) 试确定校正前系统的开环传递函数 $G_0(s)$；

(2) 确定校正后系统的开环传递函数 $G(s)$，求校正后系统的截止频率 ω_c 和相角裕度 γ；

(3) 确定校正装置的传递函数 $G_c(s)$。

第7章 线性离散控制系统的分析



教学目的与要求

1. 理解离散控制系统的基本概念。
2. 掌握信号的采样与保持。
3. 掌握 Z 变换的定义以及基本定理。
4. 掌握差分方程的定义及其求解方法。
5. 熟练掌握脉冲传递函数的定义及其求取方法。
6. 掌握离散控制系统的动态性能分析方法。
7. 能够熟练判断离散控制系统的稳定性并求取稳态误差。
8. 了解 MATLAB 对离散控制系统进行分析的基本方法。



知识结构

- 线性离散控制系统的分析
  - 离散系统的基本概念
  - 信号的采样与保持
  - 离散控制系统的数学基础
    - Z变换
  - 离散控制系统的数学模型
    - 差分方程
    - 脉冲传递函数
  - 离散控制系统分析
    - 动态性能分析
    - 稳定性能分析

近年来，随着脉冲技术、数字技术和计算机技术的飞速发展，脉冲器件、数字元件被广泛应用于控制系统中，尤其是用计算机实现的数字控制器在越来越多的场合取代模拟控制器，形成了各种离散时间系统。

在控制工程中，根据系统中信号的性质不同，控制系统通常分为两大类：一类是连续时间控制系统，另一类是离散时间控制系统。离散时间系统与连续时间系统相比较，在研究方法上既有相似之处，又有自己的特点。因此，学习并掌握离散控制系统的理论与方法已成为控制理论的重要内容。本章主要介绍离散时间系统的基本概念、线性定常离散系统的数学模型、离散控制系统的动态性能分析和稳定性分析。

7.1 离散系统的基本概念

为便于说明各种不同形式的系统，现将系统中的基本概念作简单介绍。

连续信号：在整个时间范围均有定义的信号，它的幅值可以是连续的，也可以是断续的。连续信号的一种特殊情况是幅值整量化的连续信号，如数模转换器输出的台阶式信号。

模拟信号：在整个时间范围均有定义的信号，它的幅值在某一时间范围内是连续的。模拟信号是连续信号的一个子集，在大多数场合与很多文献中，将二者等同起来。

离散信号：仅在各个离散时间瞬间有定义的信号，在时间上是离散，而幅值可以是离散的，也可以是连续的。

采样信号：取模拟信号在离散时间上的值构成的信号序列。在很多场合，提及的离散信号就是采样信号。

数字信号：在时间上和幅值上都离散的信号，它是幅值整量化的离散信号。

采样：将模拟信号按一定时间通过采样装置转化成离散信号的过程。

量化：采用一组数码来逼近离散信号的幅值，并将其转化成数字信号的过程。

自动控制系统按照它所包含的信号形式通常可以划分为以下几种类型。

连续系统：连续时间系统简称连续系统，是指控制系统中所有的信号都是时间变量的连续函数，其典型结构如图 7.1 所示。其中，$r(t)$是系统的输入，$c(t)$是系统的输出，$e(t)$是偏差信号，$u(t)$是控制量，$G_c(s)$模拟控制器的传递函数，$G_0(s)$是被控对象的传递函数。在连续系统中，使用的控制器是由模拟电子器件实现的。

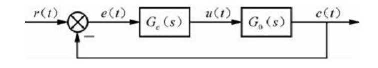


图 7.1　连续系统典型结构图

离散系统：离散时间系统简称离散系统，是指系统中有一处或几处信号是脉冲序列形式或数字序列形式。通常，若离散信号为脉冲序列形式，则该离散控制系统称为**采样控制系统**，其典型结构如图 7.2 所示，若离散信号为数字序列形式，则该离散控制系统称为**数字控制系统**，其典型结构如图 7.3 所示。

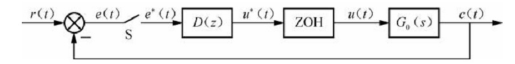


图 7.2　采样控制系统典型结构图

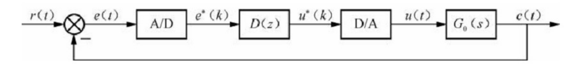


图 7.3　数字控制系统典型结构图

图 7.2 中，S 为采样开关，ZOH(Zero Order Hold)为零阶保持器，$D(z)$是数字控制器的脉冲传递函数，$e^*(t)$、$u^*(t)$分别是连续信号 $e(t)$、$u(t)$的采样信号。图 7.3 中，A/D和 D/A 分别为模数和数模转换器，$e^*(k)$、$u^*(k)$分别是连续信号 $e(t)$、$u(t)$的数字信号。

7.1.1　采样控制系统的特点

一般来说，采样系统是对来自传感器的连续信息在某些规定时间的瞬时取值。例如，控制系统中的误差信号是断续形式的脉冲信号，而相邻两个脉冲之间的误差信号，系统并没有收到。如果相邻两次采样的时间间隔相等，这样的采样称为周期采样；反之，则称为随机采样。在离散控制系统中，通常采用周期采样，相邻两次采样之间的时间称为采样周期，用符号 T 表示。

可以看出，采样控制系统是一个断续控制系统，它借助采样开关，有时对系统进行闭环控制，有时又把闭环断开不进行控制。采样系统的特点：

(1) 在连续系统中的一处或几处设置采样开关，对被控对象进行断续控制。

(2) 通常采样周期远小于被控对象的时间常数。

(3) 采样开关合上的时间远小于断开的时间。

(4) 采样周期通常是相同的。

根据采样开关在系统中所处的位置不同，可以构成各种采样系统。图 7.2 所示的误差采样控制的闭环采样系统使用最为广泛。

7.1.2　数字控制系统的特点

信号经采样量化后，采样点之间的信息会丢失，而且数字信号经 D/A 转换器后会有一定的延迟。所以，与连续系统相比，在确定的条件下，数字控制系统的性能会有所降低。然而数字化带来的好处显而易见，数字控制系统较之相应的连续系统具有以下优点：

(1) 由数字计算机构成的数字控制器，控制规律由软件实现，因此，与连续系统中的模拟控制装置相比，控制规律修改调整方便，控制灵活。

(2) 数字信号的传递可以有效地抑制噪声，从而提高了系统的抗干扰能力。

(3) 可以采用高灵敏度的控制元件，提高系统的控制精度。

(4) 可用一台计算机分时控制若干个系统，提高设备的利用率，经济性好。

7.1.3 离散控制系统的研究方法

离散系统中一处或多处信号是脉冲序列或数码，控制的过程是不连续的。如果仍沿用连续系统中的拉氏变换方法来建立系统各个环节的传递函数，则在运算过程中会出现复变量 s 的超越函数。为了克服这个障碍，需要采用 Z 变换法建立离散系统的数学模型。离散系统经过 Z 变换处理后，就可以将用于连续系统中的许多分析方法（如传递函数计算、稳定性分析、稳态误差计算等），经过适当改变后应用于离散系统的分析和设计之中。

【思考题】 离散控制系统与连续控制系统的区别是什么？

7.2 信号的采样与保持

采样开关与保持器是离散系统的两个基本环节。离散系统的特点是，系统中有一处或多处的信号是时间上离散的量，即脉冲序列或数字序列。为了把连续信号变换为脉冲信号，需要使用采样开关；另一方面，为了控制连续元件，需要使用保持器将离散信号变换为连续信号。为了定量研究离散系统，必须用数学方法对信号的采样过程和保持过程加以描述。

7.2.1 采样过程与采样定理

1. 采样信号的数学表示

一个理想采样开关可以看成是一个载波为理想单位脉冲序列 $\delta_T(t)$ 的幅值调制器，即理想采样开关的输出信号 $e^*(t)$ 是连续输入信号 $e(t)$ 调制在载波 $\delta_T(t)$ 上的结果，如图7.4所示。

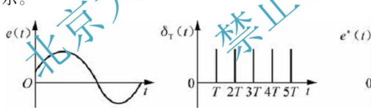


图7.4 信号的采样过程

假设当 $t<0$ 时，$e(t)=0$，用数学表达式描述上述调制过程，则有

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) = e(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{7-1}$$

2. 采样信号的拉氏变换

对采样信号 $e^*(t)$ 进行拉氏变换，可得

$$E^*(s) = L[e^*(t)] = L\left[\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs} \tag{7-2}$$

3. 连续信号与采样信号频谱的关系

由于采样信号只包括连续信号采样点上的信息，所以采样信号的频谱与连续信号的

频谱相比，要发生变化。

若采样角频率为 ω_s 的理想单位脉冲序列 $\delta_T(t)$ 是周期函数，展开成傅氏级数的形式，即

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t} \tag{7-3}$$

把式(7－3)代入式(7－1)，有

$$e^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(t)e^{jn\omega_s t} \tag{7-4}$$

式(7－4)两边取拉氏变换，由拉氏变换的复数位移定理，得到

$$E^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E(s - jn\omega_s) \tag{7-5}$$

令 $s=j\omega$，得到采样信号 $e^*(t)$ 的傅氏变换

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[j(\omega - n\omega_s)] \tag{7-6}$$

其中 $E(j\omega)$ 为非周期连续信号 $e(t)$ 的傅氏变换，即

$$E(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)e^{-j\omega t}dt \tag{7-7}$$

$e(t)$ 的频谱 $|E(j\omega)|$ 是频域中的非周期连续信号，如图 7.5(a) 所示，其中 ω_h 为频谱 $|E(j\omega)|$ 中的最大角频率。采样信号 $e^*(t)$ 的频谱 $|E^*(j\omega)|$ 是连续信号 $e(t)$ 的频谱 $|E(j\omega)|$ 以采样角频率 ω_s 为周期的无穷多个频谱的延拓，如图 7.5(b)、(c)、(d)所示。

其中 $n=0$ 的频谱称为采样频谱的主分量，它与连续频谱 $|E(j\omega)|$ 形状一致，仅在幅值上变化了 $1/T$，其余频谱($n=\pm1, \pm2, \cdots$)都是由于采样而引起的高频频谱。图 7.5(b)表示的是采样角频率 ω_s 大于 2 倍 ω_h 的情况，利用理想低通滤波器可恢复原来连续信号的频谱，其中低通滤波器的截止频率为 ω_c。如果增大采样周期 T，采样角频率 ω_s 相应减小，当 $\omega_s=2\omega_h$ 时，采样频谱的主分量与高频分量紧密相连但没有产生频谱混叠，如图 7.5(c)所示。这时，采用理想滤波器仍然可以恢复原来连续信号的频谱，但是对滤波器的截止频率 ω_c 要求较高，ω_c 只能等于 ω_h。如果进一步增大采样周期 T，采样角频率 ω_s 再减小，当 $\omega_s<2\omega_h$ 时，采样频谱的主分量与高频分量会产生频谱混叠，如图 7.5(d)所示。这时，即使采用理想滤波器也无法恢复原来连续信号的频谱。因此，要从采样信号 $e^*(t)$ 中完全复现出采样前的连续信号 $e(t)$，对采样角频率 ω_s 应有一定的要求，即香农采样定理。

4. 香农采样定理

香农采样定理指出，如果采样开关的输入信号 $e(t)$ 具有有限带宽，即具有最大角频率为 ω_h 的频率分量，若要从采样信号 $e^*(t)$ 中不失真地恢复信号 $e(t)$，则采样角频率 ω_s 必须满足下列条件：

$$\omega_s \geqslant 2\omega_h \tag{7-8}$$

在设计离散系统时，香农采样定理是必须严格遵守的一条准则，它指明了为从采样信号中不失真地复现原连续信号所需采样角频率 ω_s 的下界，也就是采样周期 T 的上界。

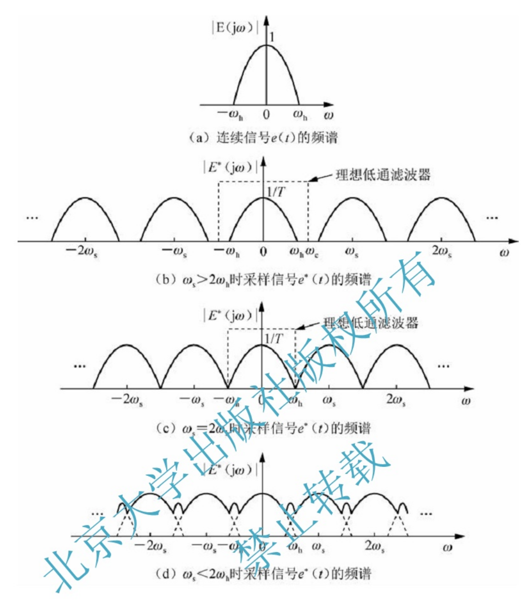


图 7.5 连续信号频谱 $|E(j\omega)|$ 与采样信号频谱 $|E^*(j\omega)|$

5. 采样周期的选取

采样定理只是给出了采样周期选择的基本原则，并未给出选择采样周期的具体计算公式。显然，采样周期 T 越小，即采样角频率 ω_s 越高，控制过程的信息获得越多，控制效果也会越好。但是，采样周期 T 选得过小，将增加不必要的计算负担，而且采样周期 T 小到一定的程度后，再减小就失去实际意义了。反之，采样周期 T 选得过大，会给控制过程带来较大的误差，降低系统的动态性能，甚至有可能导致整个控制系统失去稳定。

【思考题】 香农采样定理对于无限频谱的信号是否适用？

7.2.2 采样信号的保持

采样得到的离散信号，经控制器运算后仍为离散信号，但是控制过程当中很多被控量都是连续量，控制系统的执行机构也需要接收连续量，因此需要使用保持器将控制器输出的离散信号转换为连续信号。由图 7.5(b)、图 7.5(c)可见，在满足香农采样定理的

条件下，要想不失真地将采样开关输出信号复现成原来的连续信号，需要采用理想低通滤波器，然而理想低通滤波器物理上不可实现。在工程实践中，普遍采用零阶保持器。零阶保持器把前一采样时刻 nT 的采样值 $e(nT)$ 一直保持到下一采样时刻 $(n+1)T$ 到来之前。

1. 零阶保持器的传递函数

设零阶保持器的传递函数为 $G_h(s)$，给零阶保持器输入一个理想单位脉冲 $\delta(t)$，则其单位脉冲响应函数 $g_h(t)$ 是幅值为 1、持续时间为 T 的矩形脉冲，如图 7.6 所示。

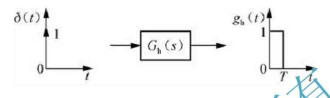


图 7.6　零阶保持器的脉冲响应

$g_h(t)$ 可分解为两个单位阶跃函数的和，即

$$g_h(t) = 1(t) - 1(t-T) \tag{7-9}$$

$g_h(t)$ 幅值为 1，说明采样幅值经零阶保持器后既不放大，也不衰减；宽度等于 T，说明零阶保持器对采样值只能保持一个采样周期。

对单位脉冲信号 $\delta(t)$ 和单位脉冲响应函数 $g_h(t)$ 分别取拉氏变换，得到的零阶保持器的传递函数为

$$G_h(s) = \frac{L[g_h(t)]}{L[\delta(t)]} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \tag{7-10}$$

2. 零阶保持器的特性

在式(7-10)中，令 $s=j\omega$，得零阶保持器的频率特性：

$$G_h(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{2j\omega} = T\frac{\sin(T\omega/2)}{T\omega/2}e^{-jT\omega/2} \tag{7-11}$$

若以采样角频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 来表示，则式(7-11)可表示为

$$G_h(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s}\cdot\frac{\sin\pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)}e^{-j\pi(\omega/\omega_s)} \tag{7-12}$$

零阶保持器的幅频特性为

$$|G_h(j\omega)| = \left|\frac{2\pi}{\omega_s}\cdot\frac{\sin\pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)}\right| = T\frac{|\sin\pi(\omega/\omega_s)|}{\pi(\omega/\omega_s)}$$

零阶保持器的相频特性为

$$\angle G_h(j\omega) = -\pi\frac{\omega}{\omega_s}$$

零阶保持器的频率特性如图 7.7 所示。

由图 7.7 可见，零阶保持器具有如下特性：

(1) 低通特性。由于幅频特性的幅值随频率值的增大而迅速衰减，说明零阶保持器近似为一个低通滤波器。零阶保持器除允许主要频谱分量通过外，还允许部分高频频谱分量通过，从而造成数字控制系统的输出频谱在高频段存在纹波。



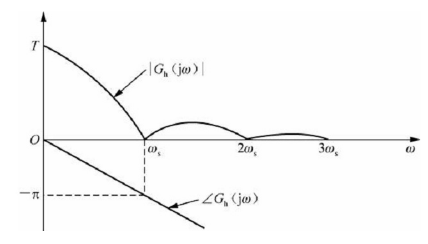


图 7.7 零阶保持器的频率特性

（2）相角滞后特性。由相频特性可见，零阶保持器要产生相角滞后，且随 ω 的增大而加大，在 $\omega=\omega_s$ 处，相角滞后可达 $-180°$，从而使系统的稳定性变差。

7.3 离散控制系统的数学基础

在连续时间系统中，为了避开求解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把问题从时域变换到 S 域中，将微分方程求解转化为代数方程求解，使计算简化。出于同样的目的，在离散系统中，需要通过 Z 变换来对系统的数学模型进行转化。Z 变换是从拉氏变换引申出来的一种变换方法，是研究线性离散系统的重要数学工具。

7.3.1 Z 变换的定义

由式(7-2)可知，采样信号 $e^*(t)$ 的拉氏变换为 $E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nsT}$，可见 $E^*(s)$ 为 s 的超越函数。为便于应用，进行变量代换

$$z=\mathrm{e}^{sT} \tag{7-13}$$

即 $s=\frac{1}{T}\ln z$，代入式(7-2)，则采样信号 $e^*(t)$ 的 Z 变换定义为

$$E(z)=Z[e^*(t)]=E^*(s)\big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n} \tag{7-14}$$

式(7-14)中，$E(z)$ 就是离散时间函数 $e^*(t)$ 的 Z 变换。Z 变换实际是一个无穷级数形式，它必须是收敛的，即 $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}e(nT)z^{-n}$ 存在时，$e^*(t)$ 的 Z 变换才存在。

在 Z 变换的过程中，由于考虑的是连续时间函数 $e(t)$ 经采样后的离散时间函数，或者说考虑的是在采样瞬间的采样值，所以式(7-14)只表示连续时间函数 $e(t)$ 在采样时刻的特性，而不能反映两个采样时刻之间的特性。从这个意义上说，连续时间函数 $e(t)$ 与相应的离散时间函数 $e^*(t)$ 具有相同的 Z 变换，即

$$E(z)=Z[e^*(t)]=Z[e(t)]=Z[E(s)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n} \tag{7-15}$$

常用时间函数的 Z 变换见附录 B。

【思考题】 对离散信号为什么不能只做拉氏变换，而必须做 Z 变换？

7.3.2 Z 变换方法

常用的 Z 变换方法有级数求和法与部分分式法（查表法）。

1. 级数求和法

Z 变换定义式(7－14)有明确的物理意义，即变量 z^{-n} 的系数代表连续时间函数在采样时刻 nT 上的采样值。根据 Z 变换的定义，并将连续信号 $e(t)$ 按周期 T 进行采样，将采样点处的值代入式(7－14)，可得

$$E(z)=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

最后求出上式的闭合形式，即可求得 $E(z)$。

【例 7－1】 对连续时间函数 $e(t)=a^t(t\geqslant 0)$，按周期 $T=1\text{s}$ 进行采样，试求 $E(z)$。

解： 按式(7－14)Z 变换的定义

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=a^{nT}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=1+az^{-1}+(az^{-1})^2+(az^{-1})^3+\cdots$$

若 $|z|>|a|$，则无穷级数是收敛的，利用等比级数求和公式，可得闭合形式为

$$E(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

2. 部分分式法

部分分式法又称查表法，即先将已知的 $E(z)$ 分解为部分分式，再通过查 Z 变换表找出相应的 $e^*(t)$ 或者 $e(nT)$。

已知连续信号 $e(t)$ 的拉氏变换 $E(s)$，将 $E(s)$ 展开成各部分分式之和，即

$$E(s)=E_1(s)+E_2(s)+\cdots+E_n(s)$$

且每一个部分分式 $E_i(s)$ 都是 Z 变换表中所对应的标准函数，其 Z 变换即可查表得出

$$E(z)=E_1(z)+E_2(z)+\cdots+E_n(z)$$

【例 7－2】 已知连续函数的拉氏变换为 $E(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$，试求相应的 Z 变换 $E(z)$。

解： 将 $E(s)$ 展成部分分式，即

$$E(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

对该式逐项查 Z 变换表，可得

$$E(z)=\frac{2Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-T}}=\frac{(2T+\mathrm{e}^{-T}-1)z^2+[1-\mathrm{e}^{-T}(2T+1)]z}{(z-1)^2(z-\mathrm{e}^{-T})}$$

7.3.3 Z 变换的基本定理

应用 Z 变换的基本定理，可以使 Z 变换的应用变得更为方便，下面介绍几种常用的 Z 变换定理。

1. 线性定理

若 $E_1[z]=Z[e_1(t)]$，$E_2[z]=Z[e_2(t)]$，a、b 为常数，则

$$Z[ae_1(t) \pm be_2(t)] = aE_1(z) \pm bE_2(z) \tag{7-16}$$

式(7-16)表明，Z 变换是一种线性变换，其变换过程满足齐次性与叠加性。

2. 实数位移定理

实数位移是指整个采样序列 $e(nT)$ 在时间轴上左右平移若干采样周期，其中向左平移 $e(nT+kT)$ 为超前平移，向右平移 $e(nT-kT)$ 为滞后平移。设函数 $e(t)$ 的 Z 变换为 $E(z)$，则实数位移定理表示如下。

滞后位移定理：

$$Z[e(nT-kT)] = z^{-k}E(z) \tag{7-17}$$

超前位移定理：

$$Z[e(nT+kT)] = z^{k}\left[E(z) - \sum_{j=0}^{k-1} e(jT)z^{-j}\right] \tag{7-18}$$

其中 k 为正整数。算子 z 有明确的物理意义：z^{-k} 代表时域中的延迟算子，它将采样信号滞后 k 个采样周期；而 z^{k} 代表超前环节，它把采样信号超前 k 个采样周期。应用实数位移定理，可将描述离散系统的差分方程转换为 Z 域的代数方程。

3. 复数位移定理

如果 $e(t)$ 的 Z 变换为 $E(z)$，则有

$$Z[e^{\mp at} \cdot e(t)] = E(z \cdot e^{\pm aT}) \tag{7-19}$$

4. 终值定理

设 $e(t)$ 的 Z 变换为 $E(z)$，且 $e(t)$ 终值存在，则

$$e(\infty) = \lim_{n\to\infty} e(nT) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) \tag{7-20}$$

在离散系统分析中，常采用终值定理求取系统输出序列的稳态值和系统的稳态误差。

5. 卷积定理

设 $x(nT)$ 和 $y(nT)$（$n=0, 1, 2, \cdots$）为两个采样信号序列，其离散卷积定义为

$$x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y[(n-k)T] \tag{7-21}$$

若 $x(nT)$ 和 $y(nT)$ 的 Z 变换分别为 $X(z)$ 和 $Y(z)$，则卷积定理可描述为

$$Z[x(nT) * y(nT)] = X(z)Y(z) \tag{7-22}$$

在离散系统分析中，卷积定理是沟通时域与 Z 域的桥梁。

7.3.4 Z 反变换

已知表达式 $E(z)$，求相应离散序列 $e(nT)$ 的过程，称为 Z 反变换，记为

$$e(nT) = Z^{-1}[E(z)] \tag{7-23}$$

当 $n<0$ 时，$e(nT)=0$，信号序列 $e(nT)$ 是单边的，对单边序列常用的 Z 反变换法有部分分式法、幂级数法。

1. 部分分式法

考虑到 Z 变换表中，所有 Z 变换函数 $E(z)$ 在其分子上都有因子 z，所以，通常先将

$E(z)/z$展成部分分式之和，然后将等式左边分母中的 z 乘到等式右边各分式中，再逐项查表进行 Z 反变换。

【例 7-3】 设 $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$，试用部分分式法求 $e(nT)$。

解： 首先将$\dfrac{E(z)}{z}$展开成部分分式，即

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{-10}{z-1}+\frac{10}{z-2}$$

把等式左端分母中的 z 乘到等式右端各分式中，得

$$E(z)=\frac{-10z}{z-1}+\frac{10z}{z-2}$$

查 Z 变换表得

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]=1，\ Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]=2^n$$

可得

$$e(nT)=10(-1+2^n)，\ n=0,1,2,\cdots$$

2. 幂级数法

Z 变换函数的无穷项级数形式具有鲜明的物理意义，即变量 z^{-n} 的系数代表连续时间函数在 nT 时刻上的采样值。若 $E(z)$ 是一个有理分式，则可以直接通过幂级数法（长除法），得到一个无穷项幂级数的展开式，再根据 z^{-n} 的系数便可以得出时间序列 $e(nT)$ 的值。

【例 7-4】 设 $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$，试用幂级数法求 $e^*(t)$。

解： $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{10z}{z^2-3z+2}$，应用幂级数法，分母除以分子，即

$$\begin{array}{r|l}
 & 10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+150z^{-4}+\cdots \\
\hline
z^2-3z+2 & 10z \\
 & \underline{10z\quad -30z^0\quad +20z^{-1}} \\
 & \qquad 30z^0\quad -20z^{-1} \\
 & \qquad \underline{30z^0\quad -90z^{-1}\quad +60z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad 70z^{-1}\quad -60z^{-2} \\
 & \qquad\qquad \underline{70z^{-1}\quad -210z^{-2}\quad +140z^{-3}} \\
 & \qquad\qquad\qquad 150z^{-2}\quad -140z^{-3}
\end{array}$$

$E(z)$可写成 $E(z)=0z^0+10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+150z^{-4}+\cdots$，所以

$$e^*(t)=10\delta(t-T)+30\delta(t-2T)+70\delta(t-3T)+150\delta(t-4T)+\cdots$$

7.4 离散控制系统的数学模型

为了研究离散控制系统的性能，需要建立离散系统的数学模型。与连续系统的数学模型类似，线性离散系统的数学模型有差分方程和脉冲传递函数。差分方程用来描述系



统输出与输入之间的关系，通常使用 Z 变换来求解；脉冲传递函数用来对离散系统进行动态分析。

7.4.1 差分方程及其求解

1. 差分的定义

离散函数两数之差为差分。差分又分为前向差分和后向差分。为方便起见，令$T=1$s。

一阶前向差分定义为

$$\Delta f(k)=f(k+1)-f(k) \tag{7-24}$$

二阶前向差分定义为

$$\Delta^2 f(k)=\Delta[\Delta f(k)]=f(k+2)-2f(k+1)+f(k) \tag{7-25}$$

n 阶前向差分定义为

$$\Delta^n f(k)=\Delta^{n-1}f(k+1)-\Delta^{n-1}f(k) \tag{7-26}$$

一阶后向差分定义为

$$\nabla f(k)=f(k)-f(k-1) \tag{7-27}$$

二阶后向差分定义为

$$\nabla^2 f(k)=\nabla[\nabla f(k)]=f(k)-2f(k-1)+f(k-2) \tag{7-28}$$

n 阶后向差分定义为

$$\nabla^n f(k)=\nabla^{n-1}f(k)-\nabla^{n-1}f(k-1) \tag{7-29}$$

信号的一阶差分如图 7.8 所示。

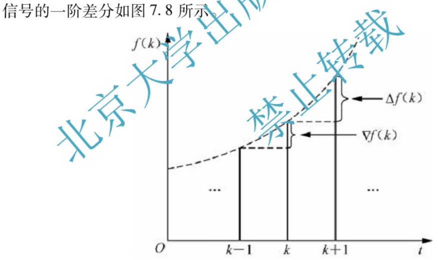


图 7.8 信号的一阶差分

2. 差分方程

对于一般的线性定常离散系统，k 时刻的输出 $c(k)$，不但与 k 时刻的输入 $r(k)$有关，而且与 k 时刻以往的输入 $r(k-1)$，$r(k-2)$，…和 k 时刻以往的输出 $c(k-1)$，$c(k-2)$，…都有关。这种关系一般可以用 n 阶后向差分方程来描述，即

$$c(k)=-\sum_{i=1}^{n}a_i c(k-i)+\sum_{j=0}^{m}b_j r(k-j) \tag{7-30}$$

式(7-30)称为 n 阶线性常系数差分方程，它在数学上代表一个线性定常离散系统。其

中，$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$和$b_j(j=0, 1, \cdots, m)$为常系数，且$m\leqslant n$。

线性定常离散系统也可以用n阶前向差分方程来描述，即

$$c(k+n)=-\sum_{i=1}^{n}a_i c(k+n-i)+\sum_{j=0}^{m}b_j r(k+m-j) \tag{7-31}$$

3. *差分方程的解法*

工程上求解常系数差分方程通常采用迭代法和Z变换法。

1）迭代法

若已知差分方程式(7-30)或式(7-31)，并且给定输入序列和输出序列的初值，则可以利用递推关系，在计算机上通过迭代一步一步地算出输出序列。

【例7-5】 已知二阶差分方程$c(k)=r(k)+5c(k-1)-6c(k-2)$，输入$r(k)=1$，初始条件为$c(0)=0$，$c(1)=1$，试用迭代法求输出序列$c(k)$，$k=0, 1, 2, \cdots$

解：根据初始条件及递推关系，得

$$\begin{aligned}
&c(0)=0\\
&c(1)=1\\
&c(2)=r(2)+5c(1)-6c(0)=6\\
&c(3)=r(3)+5c(2)-6c(1)=25\\
&c(4)=r(4)+5c(3)-6c(2)=90\\
&c(5)=r(5)+5c(4)-6c(3)=301\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

2）Z变换法

用Z变换求解差分方程与用拉氏变换求解微分方程类似，即将时域内的差分方程转换为Z域内的代数方程，求出代数方程的解后，再进行Z反变换，求出系统在各采样时刻的输出响应。

【例7-6】 用Z变换法解差分方程$c(k+2)+3c(k+1)+2c(k)=1(k)$，初始条件为$c(0)=0, c(1)=1$。

解：将差分方程取Z变换，得到

$$[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)]+3[zC(z)-zc(0)]+2C(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$(z^2+3z+2)C(z)=\frac{z^2}{z-1}$$

$$C(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z^2+3z+2)}=\frac{z/6}{z-1}+\frac{z/2}{z+1}-\frac{2z/3}{z+2}$$

查Z变换表，求出Z反变换得$c(kT)=\frac{1}{6}(1)^k+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{2}{3}(-2)^k$，$(k=0, 1, 2, \cdots)$。

【思考题】 用迭代法和Z变换法求解差分方程，各有什么特点？

7.4.2 脉冲传递函数的定义

在连续系统的分析中，系统的数学模型一般不用微分方程，而采用传递函数来表示。同样，对于离散控制系统是借助于脉冲传递函数，对系统进行分析和设计的。Z变换和Z

反变换不仅可以求解线性常系数差分方程，其更重要的意义在于导出线性离散系统的脉冲传递函数，进而对线性离散系统进行分析。

设开环离散系统如图7.9所示。

如果系统的初始条件为零，输入信号为$r(t)$，采样后$r^*(t)$的Z变换函数为$R(z)$，系统连续部分的输出为$c(t)$，采样后$c^*(t)$的Z变换函数为$C(z)$，则线性定常离散系统的脉冲传递函数定义即系统输出采样信号的Z变换与输入采样信号的Z变换之比，即

$$G(z)=\frac{Z[c^*(t)]}{Z[r^*(t)]}=\frac{C(z)}{R(z)} \tag{7-32}$$

值得提出的是，在列写具体环节的脉冲传递函数时，必须特别注意，在该环节的两侧都应该设置同步采样开关。对于大多数实际系统来说，尽管其输入为采样信号，但其输出往往仍是连续信号$c(t)$，不是采样信号$c^*(t)$，如图7.10所示。这时，为了引出$c^*(t)$及求取脉冲传递函数，可以在输出端虚设一个理想采样开关，如图7.10中的虚线所示。它与输入端的采样开关同步工作，因此具有相同的采样周期T。

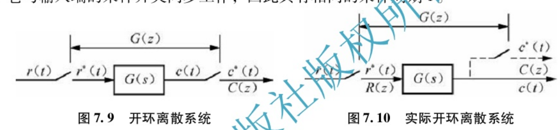


图7.9　开环离散系统　　图7.10　实际开环离散系统

根据求出的系统脉冲传递函数，显然有

$$C(z)=G(z)R(z)$$

$$c^*(t)=Z^{-1}[C(z)]=Z^{-1}[G(z)R(z)]$$

由于$R(z)$是已知的，因此求取$c^*(t)$的关键在于求取系统的脉冲传递函数$G(z)$。

7.4.3　开环系统的脉冲传递函数

当开环离散系统由几个环节串联组成时，由于采样开关的数目和位置不同，求出的开环脉冲传递函数也不同，下面将分情况讨论。

1. 串联环节之间有采样开关

设开环离散系统如图7.11所示，在两个串联连续环节$G_1(s)$和$G_2(s)$之间，有理想采样开关。根据脉冲传递函数定义，有

$$Q(z)=G_1(z)R(z),\quad C(z)=G_2(z)Q(z)$$

其中$G_1(z)$和$G_2(z)$分别为$G_1(s)$和$G_2(s)$的脉冲传递函数。于是有

$$C(z)=G_2(z)G_1(z)R(z)$$

因此，开环系统脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z) \tag{7-33}$$

式(7-33)表明，由理想采样开关隔开的两个线性连续环节串联时的脉冲传递函数，等于这两个环节各自的脉冲传递函数之积。这一结论，可以推广到n个环节相串联时的情形。

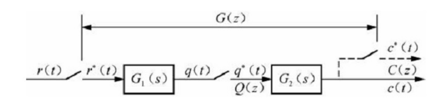


图 7.11 环节间有理想采样开关的串联开环离散系统

2. 串联环节之间无采样开关

设开环离散系统如图 7.12 所示，在两个串联连续环节 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 之间没有理想采样开关隔开。此时系统的传递函数为

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)$$

将它当作一个整体一起进行 Z 变换，由脉冲传递函数定义

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=Z[G_1(s)\ \ G_2(s)]=G_1G_2(z) \tag{7-34}$$

式(7-34)表明，没有采样开关隔开的两个线性连续环节串联的脉冲传递函数，等于这两个环节传递函数乘积后的 Z 变换。这一结论也可以推广到类似的 n 个环节相串联时的情形。

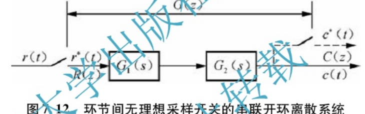


图 7.12 环节间无理想采样开关的串联开环离散系统

注意，式(7-33)与式(7-34)不相等，即

$$G_1(z)G_2(z)\neq G_1G_2(z) \tag{7-35}$$

3. 零阶保持器与环节串联

设带零阶保持器的开环离散系统如图 7.13 所示，其中 $G_{\mathrm{p}}(s)$ 表示系统连续部分的传递函数。

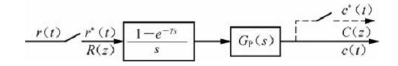


图 7.13 有零阶保持器的开环离散系统

$$\begin{aligned}C(z)&=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_{\mathrm{p}}(s)\right]R(z)\\&=Z\left[\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}-e^{-Ts}\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}\right]R(z)\\&=\left[\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}\right]R(z)-z^{-1}Z\left[\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}\right]R(z)\end{aligned}$$

$$=(1-Z^{-1})\cdot Z\left[\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}\right]R(z)$$

于是，有零阶保持器时，开环系统脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_{\mathrm{p}}(s)}{s}\right] \tag{7-36}$$

7.4.4 闭环系统的脉冲传递函数

由于采样开关在闭环系统中可以有多种配置，因此闭环离散系统结构图形式并不唯一。图 7.14 是一种比较常见的误差采样闭环离散系统结构图，其中，虚线所示的理想采样开关是为了便于分析而设的，所有理想采样开关都同步工作，采样周期为 T。

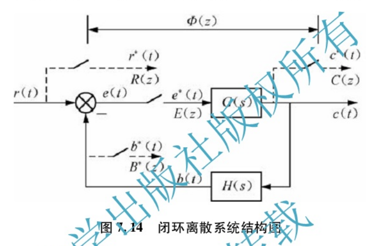


图 7.14 闭环离散系统结构图

由脉冲传递函数的定义及开环脉冲传递函数的求法，对图 7.14 可建立方程组如下：

$$\begin{cases}C(z)=G(z)E(z)\\E(z)=R(z)-B(z)\\B(z)=GH(z)E(z)\end{cases}$$

解方程组，可得该闭环离散系统脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)} \tag{7-37}$$

闭环离散系统的误差脉冲传递函数为

$$\Phi_{\mathrm{e}}(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+GH(z)} \tag{7-38}$$

式(7-37)和式(7-38)是研究闭环离散系统时经常用到的两个闭环脉冲传递函数。与连续系统相类似，令 $\Phi(z)$ 或 $\Phi_{\mathrm{e}}(z)$ 的分母多项式为零，便可得到闭环离散系统的特征方程

$$D(z)=1+GH(z)=0 \tag{7-39}$$

式中 $GH(z)$ 为开环离散系统脉冲传递函数。

需要指出，闭环离散系统脉冲传递函数不能直接从 $\Phi(s)$ 和 $\Phi_{\mathrm{e}}(s)$ 求 Z 变换得来，即

$$\Phi(z)\neq Z[\Phi(s)],\Phi_{\mathrm{e}}(z)\neq Z[\Phi_{\mathrm{e}}(s)]$$

这是由于采样开关在闭环系统中有多种配置的缘故。

用与上面类似的方法，还可以推导出采样开关为不同配置形式的闭环系统的脉冲传

递函数。但是，只要误差信号 $e(t)$ 处没有采样开关，输入采样信号 $r^*(t)$ 便不存在，此时不可能求出闭环离散系统的脉冲传递函数 $\Phi(z)$，而只能求出输出采样信号的 Z 变换函数 $C(z)$。

应当指出，一般来说，采样系统结构图的形式，随着采样开关的位置及其个数的不同而不同。不同结构形式的脉冲传递函数一般也是不同的，这里限于篇幅不再一一讨论。只将一些常见的典型闭环采样系统及其输出的 Z 变换列于表 7－1。

表 7－1　典型闭环采样系统及其输出的 Z 变换

采样系统	Z 变换
	$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+GH(z)}$
	$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+G(z)H(z)}$
	$C(z)=\frac{RG(z)}{1+HG(z)}$ 因 $e(t)$ 处没有采样开关，故无法求出 $\Phi(z)$
	$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+G(z)H(z)}$
	$C(z)=\frac{G_2(z)RG_1(z)}{1+G_1G_2H(z)}$ 因 $e(t)$ 处没有采样开关，故无法求出 $\Phi(z)$
	$C(z)=\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1+G_1(z)_2H(z)}$

【思考题】 脉冲传递函数与传递函数有什么区别与联系？

7.5　离散控制系统的动态性能分析

分析离散系统的动态性能，通常是先求取离散系统的阶跃响应序列，再按动态性能指标定义来定量计算；另外，Z 平面上闭环极点的位置对系统动态性能也有很大影响，通常进行定性分析。

7.5.1 离散系统的动态响应分析

设离散系统的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)=C(z)/R(z)$，则系统单位阶跃响应的 Z 变换

$$C(z)=R(z)\Phi(z)=\frac{z}{(z-1)}\Phi(z)$$

通过 Z 反变换，可以求出输出信号的脉冲序列 $c^*(t)$。若离散系统时域指标的定义与连续系统相同，则根据单位阶跃响应序列 $c^*(t)$ 可以对离散系统的动态性能定量计算。

【例 7-7】 设有零阶保持器的离散系统如图 7.15 所示，其中 $r(t)=1(t)$，$T=1\mathrm{s}$，$K=1$。试分析系统的动态性能。

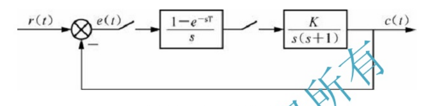


图 7.15 闭环离散系统

解： 先求开环脉冲传递函数

$$G(z)=Z\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s^2(s+1)}\right]=\frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

将 $R(z)=z/(z-1)$ 代入该式，求出单位阶跃响应序列的 Z 变换，即

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-2z^{-1}+1.632z^{-2}-0.632z^{-3}}$$

通过幂级数法，得到系统的阶跃响应序列 $c(nT)$ 如下所示。

$c(0T)=0$	$c(6T)=0.8944$	$c(12T)=1.0323$	$c(18T)=1.0164$
$c(1T)=0.3679$	$c(7T)=0.8015$	$c(13T)=0.9811$	$c(19T)=1.0070$
$c(2T)=1.0000$	$c(8T)=0.8682$	$c(14T)=0.9607$	$c(20T)=0.9967$
$c(3T)=1.3996$	$c(9T)=0.9937$	$c(15T)=0.9726$	⋮
$c(4T)=1.3996$	$c(10T)=1.0770$	$c(16T)=0.9975$	
$c(5T)=1.1470$	$c(11T)=1.0810$	$c(17T)=1.0148$	

绘出离散系统的单位阶跃响应 $c^*(t)$ 如图 7.16 所示。

由图 7.16 可近似求得超调量 $\sigma\%=40\%$，峰值时间 $t_p=4\mathrm{s}$，调节时间 $t_s=12\mathrm{s}$。因为离散系统的时域性能指标只能按采样点上的值来计算，所以是近似的。



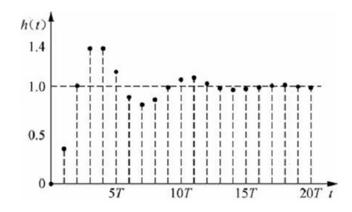


图 7.16　例 7-7 的单位阶跃响应

7.5.2　闭环极点位置与动态响应的关系

离散系统闭环脉冲传递函数的极点在 Z 平面上的分布，对系统的动态响应具有重要的影响。明确它们之间的关系，对离散系统的定性分析具有指导意义。

设系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}=\frac{b_m\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z-p_j)}(m\leqslant n)\tag{7-40}$$

式中，$N(z)$表示$\Phi(z)$的分子多项式，$D(z)$表示$\Phi(z)$的分母多项式，$z_i(i=1,2,\cdots,m)$表示$\Phi(z)$的零点，$p_j(j=1,2,\cdots,n)$表示$\Phi(z)$的极点。为了不失一般性，且便于讨论，假定$\Phi(z)$无重极点。

当$r(t)=1(t)$时，离散系统输出的 Z 变换为

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{N(z)}{D(z)}\cdot\frac{z}{z-1}\tag{7-41}$$

将$C(z)$展开成部分分式，可得

$$C(z)=\frac{c_0 z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k z}{z-p_k}\tag{7-42}$$

式(7-42)中，等号右端第一项的 Z 反变换是$c^*(t)$的稳态分量；第二项的 Z 反变换为$c^*(t)$的瞬态分量，其决定动态响应形式。将瞬态分量表示为

$$c_k^*(t)=Z^{-1}\left[\frac{c_k z}{z-p_k}\right]\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

经反变换得

$$c_k(nT)=c_k p_k\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{7-43}$$

根据p_k在 Z 平面上的位置，可以确定$c^*(t)$的动态响应形式。下面分几种情况来讨论。

1. 正实轴上的闭环单极点

设p_k为正实数，若令$a=\dfrac{1}{T}\ln p_k$，则式(7-43)可写为

$$c_k(nT) = c_k \mathrm{e}^{anT} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

所以，当 p_k 为正实数时，正实轴上的闭环极点对应的动态过程形式如下：

(1) 若闭环单极点位于 Z 平面单位圆外的正实轴上，即 $p_k > 1$，则 $a > 0$，故动态响应 $c_k(nT)$ 是按指数规律发散的脉冲序列。

(2) 若闭环单极点位于 Z 平面正实轴的单位圆周上，即 $p_k = 1$，则 $a = 0$，故动态响应 $c_k(nT)$ 是等幅脉冲序列。

(3) 若闭环单极点位于 Z 平面单位圆内的正实轴上，即 $0 < p_k < 1$，则 $a < 0$，故动态响应 $c_k(nT)$ 是按指数规律衰减的脉冲序列，且 p_k 越接近原点，$|a|$ 越大，$c_k(nT)$ 衰减越快。

2. 负实轴上的闭环单极点

设 p_k 为负实数，由式(7－43)可见，当 n 为奇数时 p_k^n 为负；当 n 为偶数时 p_k^n 为正。因此，负实数极点对应的动态响应 $c_k(nT)$ 是交替变号的双向脉冲序列。

(1) 若闭环单极点位于 Z 平面单位圆外的负实轴上，即 $p_k < -1$，则 $c_k(nT)$ 为交替变号的发散脉冲序列。

(2) 若闭环单极点位于 Z 左半平面的单位圆周上，即 $p_k = -1$，则 $c_k(nT)$ 为交替变号的等幅脉冲序列。

(3) 若闭环单极点位于 Z 平面上单位圆内的负实轴上，即 $-1 < p_k < 0$，则 $c_k(nT)$ 为交替变号的衰减脉冲序列，且 p_k 离原点越近，$c_k(nT)$ 衰减越快。

综上，闭环实数极点分布与相应动态响应形式的关系如图 7.17 所示。

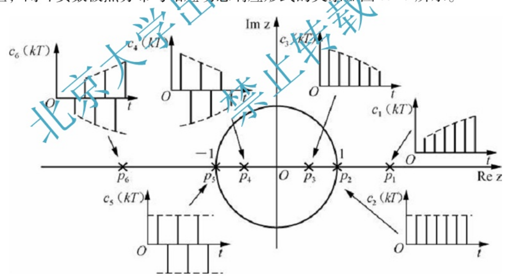


图 7.17　闭环实极点分布与相应的动态响应形式

3. Z 平面上的闭环共轭复数极点

设 p_k 和 $\bar{p}_k$ 为一对共轭复数极点(简称共轭复极点)，其表达式为

$$p_k = |p_k| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k}, \bar{p}_k = |p_k| \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_k} \qquad (7-44)$$

其中 θ_k 为共轭复数极点的相角，从 Z 平面实轴正方向开始，逆时针为正。显然，由式(7－44)知，共轭复极点所对应的瞬态分量为



$$c_{k,\bar{k}}(nT)=c_kp_k^n+\bar{c}_k\bar{p}_k^n \tag{7-45}$$

令

$$c_k=|c_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k},\quad \bar{c}_k=|c_k|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_k} \tag{7-46}$$

再令

$$|p_k|=\mathrm{e}^{aT},\ p_k=\mathrm{e}^{a_kT},\ \bar{p}_k=\mathrm{e}^{\bar{a}_kT}$$

$$\omega=\frac{\theta_k}{T},\ 0<\theta_k<\pi$$

$$a_k=\frac{1}{T}\ln(|p_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k})=\frac{1}{T}\ln(|p_k|)+\mathrm{j}\frac{\theta_k}{T}=a+\mathrm{j}\omega$$

$$\bar{a}_k=\frac{1}{T}\ln(|p_k|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_k})=\frac{1}{T}\ln(|p_k|)-\mathrm{j}\frac{\theta_k}{T}=a-\mathrm{j}\omega$$

则式(7-45)可表示为

$$\begin{aligned}c_{k,\bar{k}}(nT)&=c_kp_k^n+\bar{c}_k\bar{p}_k^n=c_k\mathrm{e}^{a_knT}+\bar{c}_k\mathrm{e}^{\bar{a}_knT}\\&=|c_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{j}\omega)nT}+|c_k|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_k}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}\omega)nT}\\&=2|c_k|\mathrm{e}^{anT}\cos(n\omega T+\varphi_k)\end{aligned} \tag{7-47}$$

式(7-47)表明：

(1) 共轭复数极点对应的瞬态分量 $c_{k,\bar{k}}(nT)$ 按振荡规律变化，振荡的角频率为 ω。在 Z 平面上，共轭复数极点的相角 θ_k 越大，$c_{k,\bar{k}}(nT)$ 振荡的角频率也就越高。

(2) 若 $|p_k|>1$，闭环复数极点位于 Z 平面上的单位圆外，有 $a>0$，故动态响应 $c_{k,\bar{k}}(nT)$ 为振荡发散脉冲序列。

(3) 若 $|p_k|=1$，闭环复数极点位于 Z 平面上的单位圆上，有 $a=0$，故动态响应 $c_{k,\bar{k}}(nT)$ 为等幅振荡脉冲序列。

(4) 若 $|p_k|<1$，闭环复数极点位于 Z 平面上的单位圆内，有 $a<0$，故动态响应 $c_{k,\bar{k}}(nT)$ 为振荡衰减脉冲序列，且 $|p_k|$ 越小，即复极点越靠近原点，振荡衰减越快。

综上，闭环共轭复数极点分布与相应动态响应形式的关系可由图 7.18 表示。

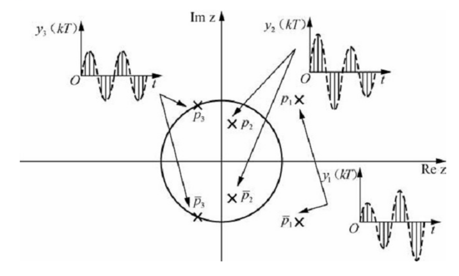


图 7.18　闭环复极点分布与相应的动态响应形式

综上所述，离散系统的动态特性与闭环极点的分布密切相关。在保证系统稳定的前提下，还要考虑系统的动态特性。当闭环实极点位于 Z 平面的左半单位圆内时，由于输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差；当闭环复极点位于左半单位圆内时，由于输出是衰减的高频脉冲，故系统动态过程性能欠佳。因此，在离散系统设计时，应把闭环极点安置在 Z 平面的右半单位圆内的实轴上，且尽量靠近原点。

【思考题】 在设计离散系统时，如何合理配置系统的极点才能获得较好的动态性能？

7.6 离散控制系统的稳定性与稳态误差

与线性连续系统分析中的情况一样，稳定性和稳态误差是线性定常离散系统分析的重要内容。本节主要讨论如何在 Z 域和 W 域中分析离散系统的稳定性，同时给出计算离散系统稳态误差的方法。

在 Z 平面上分析离散系统的稳定性，可以借助于连续系统在 S 平面上稳定性的分析方法。为此首先需要研究 S 平面与 Z 平面的映射关系。

7.6.1 S 平面与 Z 平面的关系

在 Z 变换定义中，$z=e^{sT}$ 给出了 S 域到 Z 域的映射关系。S 域中的任意点可表示为 $s=\sigma+j\omega$，映射到 Z 域则为

$$z=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T} \tag{7-48}$$

于是 S 域到 Z 域的基本映射关系式为

$$|z|=e^{\sigma T} \quad \angle z=\omega T \tag{7-49}$$

因此，S 平面与 Z 平面存在如下映射关系：

$\sigma>0$，S 平面上闭环极点位于虚轴右侧，系统不稳定，对应 Z 平面上，$|z|>1$，闭环极点在以原点为圆心单位圆外。

$\sigma=0$，S 平面上闭环极点位于虚轴上，系统临界稳定，对应 Z 平面上，$|z|=1$，闭环极点在以原点为圆心单位圆上。

$\sigma<0$，S 平面上闭环极点位于虚轴左侧，系统稳定，对应 Z 平面上，$|z|<1$，闭环极点在以原点为圆心单位圆内。所以，S 左半平面映射到 Z 平面上为单位圆内，如图 7.19 所示。

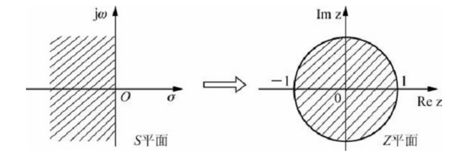


图 7.19 S 左半平面到 Z 平面上的映射

7.6.2　Z 平面内的稳定条件

由 S 域到 Z 域的映射关系及连续系统的稳定判据，可知：

(1) S 左半平面映射为 Z 平面单位圆内的区域，对应稳定区域。

(2) S 右半平面映射为 Z 平面单位圆外的区域，对应不稳定区域。

(3) S 平面上的虚轴，映射为 Z 平面的单位圆周，对应临界稳定情况，属不稳定。

由式(7－40)可知，离散控制系统输出 $c(t)$ 的 Z 变换可以写为

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{N(z)}{D(z)}R(z)$$

系统在单位脉冲作用下，因 $R(z)=1$，有

$$C(z)=\Phi(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i z}{z-p_i} \tag{7-50}$$

式中 p_i 为 $\Phi(z)$ 的极点，c_i 为每个部分分式的系数，$i=1, 2, \cdots, n$。

对式(7－50)求 Z 反变换得

$$c(kT)=\sum_{i=1}^{n}c_i p_i^k$$

若使 $\lim\limits_{k\to\infty}c(kT)=0$，必须有 $|p_i|<1$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，即离散系统的全部极点均位于 Z 平面上以原点为圆心的单位圆内。

另一方面，如果离散系统的全部极点均位于 Z 平面上以原点为圆心的单位圆之内，即

$$|p_i|<1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则一定有

$$\lim_{k\to\infty}c(kT)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}c_i p_i^k\to 0$$

说明系统稳定。

综上所述，线性定常离散系统稳定的充分必要条件是，系统闭环脉冲传递函数的全部极点分布在 Z 平面上以原点为圆心的单位圆内，或者系统所有特征根的模小于 1。

【例 7－8】 设离散系统如图 7.14 所示，其中 $G(s)=1/[s(s+1)]$，$H(s)=1$，$T=1$。试分析系统的稳定性。

解： 由 $G(s)$ 可求出开环脉冲传递函数，即

$$G(z)=\frac{(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

可得出系统闭环特征方程

$$D(z)=z^2-0.736z+0.368=0$$

解出特征方程的根

$$z_1=0.37+j0.48,\ z_2=0.37-j0.48$$

因为

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{0.37^2+0.48^2}\approx 0.606<1$$

所以该离散系统稳定。

应当指出，当例 7－8 中无采样开关时，对应的二阶连续系统总是稳定的，引入采样



开关后，采样点之间的信息会丢失，系统的相对稳定性变差。当采样周期增加时，二阶离散系统有可能变得不稳定。

当系统阶数较高时，直接求解差分方程或特征方程的根是不方便的，希望寻找一种实用的稳定判据，方便地用于研究离散系统结构、参数、采样周期等对系统稳定性的影响。

【思考题】 采样周期对离散系统的稳定性有没有影响？

7.6.3 离散系统的稳定性判据

在连续系统中，可以应用劳斯稳定判据来判断系统的稳定性，即判断系统特征方程的根是否都在 S 左半平面。而离散系统的稳定性需要确定系统特征方程的根是否都在 Z 平面的单位圆内，因此在 Z 域中不能直接套用劳斯稳定判据。另外如果将 Z 平面再复原到 S 平面，则系统方程中将出现超越函数，反而增加了解决问题的难度，所以必须寻找一种新的变换，使 Z 平面单位圆内的区域映射成新平面上的左半平面，这时就可以应用劳斯稳定判据判定系统的稳定性。此新的平面就称为 W 平面，这种新的变换，即 Z 域到 W 域的变换，称为 W 变换。

1. W 变换与 W 域中的劳斯稳定判据

如果令

$$z=\frac{w+1}{w-1} \tag{7-51}$$

则有

$$w=\frac{z+1}{z-1} \tag{7-52}$$

式(7-51)与式(7-52)表明，复变量 z 与 w 互为线性变换，故 W 变换又称双线性变换。令复变量

$$z=x+\mathrm{j}y,\quad w=u+\mathrm{j}v$$

代入式(7-52)，得

$$u+\mathrm{j}v=\frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2}-\mathrm{j}\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

显然

$$u=\frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} \tag{7-53}$$

由于式(7-53)的分母 $(x-1)^2+y^2$ 始终为正，因此可得

(1) $u=0$ 等价为 $x^2+y^2=1$，表明 W 平面的虚轴对应于 Z 平面的单位圆周。

(2) $u<0$ 等价为 $x^2+y^2<1$，表明 W 左半平面对应于 Z 平面单位圆内的区域。

(3) $u>0$ 等价为 $x^2+y^2>1$，表明 W 右半平面对应于 Z 平面单位圆外的区域。

Z 平面的稳定域到 W 平面的映射，如图 7.20 所示。

经过 W 变换之后，判别特征方程 $1+GH(z)=0$ 的所有根是否位于 Z 平面上的单位圆内，转换为判别特征方程 $1+GH(w)=0$ 的所有根是否位于 W 左半平面。后一种情况正好与在 S 平面上应用劳斯稳定判据的情况一样，所以根据 W 域中的特征方程系数，可以直接应用劳斯稳定判据判断离散系统的稳定性，称之为 W 域中的劳斯稳定判据。

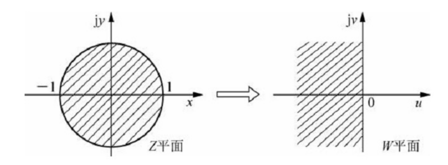


图 7.20　Z 平面的稳定域到 W 平面的映射

【例 7-9】　闭环离散系统如图 7.21 所示，其中采样周期 $T=0.1\text{s}$，试求系统稳定时 K 的范围。

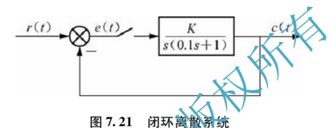


图 7.21　闭环离散系统

解：求出 $G(s)$ 的 Z 变换

$$G(z)=Z\left[\frac{K}{s(0.1s+1)}\right]=\frac{0.632Kz}{z^2-1.368z+0.368}$$

闭环特征方程为

$$D(z)=1+G(z)=z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

经 W 变换得

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+(0.632K-1.368)\left(\frac{w+1}{w-1}\right)+0.368=0$$

化简后，得 W 域特征方程

$$0.632Kw^2+1.264w+(2.736-0.632K)=0$$

列出劳斯表

w^2	$0.632K$	$2.736-0.632K$
w^1	1.264	0
w^0	$2.736-0.632K$	

从劳斯表第一列系数可以看出，为保证系统稳定，必须有 $0<K<4.33$。

2. 二次项特征方程稳定性的 Z 域直接判别法

特别地，当离散系统的特征方程最高为二次项时，可不必进行 W 变换，也不必求其根，而可以直接在 Z 域判别系统稳定性。

设系统的特征方程为

$$D(z)=z^2+a_1z+a_0=0 \tag{7-54}$$

式(7-54)中 a_1、a_0 均为实数，当同时满足下列三个条件时，则系统是稳定的。

(1) $|D(z)|=|a_0|<1$；

(2) $D(1)=1+a_1+a_0>0$;

(3) $D(-1)=1-a_1+a_0>0$。

【例 7-10】 在例 7-9 中，试用 Z 域直接判别法确定满足系统稳定时的 K 值范围。

解：系统的特征方程为

$$D(z)=z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

利用 Z 域直接判别法的三个条件，有

$$|D(z)|=|0.368|<1$$

$$D(1)=1+(0.632K-1.368)+0.368>0$$

$$D(-1)=1-(0.632K-1.368)+0.368>0$$

第一个条件与 K 无关，第二个条件解得 $K>0$，第三个条件解得 $K<4.33$，即满足系统稳定的 K 值范围为 $0<K<4.33$。此结果与经 W 变换后用劳斯稳定判据给出的结果相同。

【思考题】 在离散系统的稳定性分析中，能否直接用劳斯稳定判据，为什么？

7.6.4 离散系统的稳态误差

稳态误差是分析和设计控制系统的一个主要性能指标。在连续系统中，稳态误差的计算方法可以通过两种方法进行，一种是建立在拉氏变换终值定理基础上的计算方法，另一种是从系统误差传递函数出发的静态误差系数法。这两种方法在一定的条件下可以推广到离散系统中。但是与连续系统不同的是，离散系统的稳态误差只对采样点而言。

1. 一般方法——终值定理

设单位负反馈的误差采样系统如图 7.22 所示，$e^*(t)$ 为系统采样误差信号，其 Z 变换为

$$E(z)=R(z)-C(z)=R(z)-G(z)E(z)$$

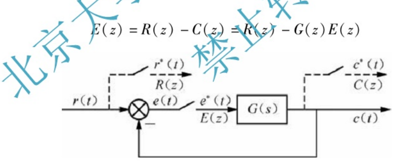


图 7.22 单位负反馈离散系统

系统误差脉冲传递函数为

$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$

则误差信号的 Z 变换为

$$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

如果 $\Phi_e(z)$ 的极点全部位于 Z 平面上的单位圆内，即离散系统是稳定的，则可用 Z 变换的终值定理求出采样瞬时的稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^*(t)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]} \tag{7-55}$$

式(7－55)表明，线性定常离散系统的稳态误差，不仅与系统本身的结构和参数有关，与输入序列的形式及幅值有关，而且与采样周期的选取也有关。

【例7－11】 设离散系统如图7.22所示，其中，$G(s)=1/[s(s+1)]$，$T=1\mathrm{s}$，输入连续信号 $r(t)$ 分别为 $1(t)$ 和 t，试求离散系统的稳态误差。

解： $G(s)$ 的 Z 变换为

$$G(z)=Z[G(s)]=\frac{z(1-\mathrm{e}^{-1})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-1})}$$

系统的误差脉冲传递函数为

$$\Phi_{\mathrm{e}}(z)=\frac{1}{1+G(z)}=\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}$$

闭环极点 $z_1=0.368+\mathrm{j}0.482$，$z_2=0.368-\mathrm{j}0.482$，全部位于 Z 平面的单位圆内，可以应用终值定理方法求稳态误差。

当 $r(t)=1(t)$，相应 $r(nT)=1(nT)$ 时，$R(z)=z/(z-1)$，由式(7－55)求得

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}=0$$

当 $r(t)=t$，相应 $r(nT)=nT$ 时，$R(z)=Tz/(z-1)^2$，于是由式(7－55)求得

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{T(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}=T=1$$

2. *静态误差系数法*

由 Z 变换算子 $z=\mathrm{e}^{sT}$ 关系式可知，如果开环传递函数 $G(s)$ 有 v 个 $s=0$ 的极点，即 v 个积分环节，与 $G(s)$ 相应的 $G(z)$ 必有 v 个 $z=1$ 的极点。在连续系统中，将开环传递函数 $G(s)$ 具有 $s=0$ 的极点数作为划分系统型别的标准，而在离散系统中，把开环脉冲传递函数 $G(z)$ 具有 $z=1$ 的极点数作为划分离散系统型别的标准。$v=0$，1，2 时，分别称为0型、Ⅰ型和Ⅱ型离散系统。

下面在系统稳定的条件下讨论图7.22所示的不同型别的离散系统在三种典型输入信号作用下的稳态误差，并建立离散系统静态误差系数的概念。

设闭环系统的开环脉冲传递函数的一般表达式为

$$G(z)=\frac{K_{\mathrm{r}}\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)^v\prod_{j=1}^{n-v}(z-p_j)} \tag{7-56}$$

其中 K_{r} 为系统的开环增益，z_i 为系统的开环零点，p_j 为系统除去 v 个 $z=1$ 之外的开环极点。

1）阶跃输入时的稳态误差

当系统输入为阶跃函数 $r(t)=A\cdot1(t)$ 时，其 Z 变换函数为

$$R(z)=\frac{Az}{z-1}$$

由终值定理知，稳态误差为

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{A}{1+G(z)}=\frac{A}{1+\lim\limits_{z\to1}G(z)}=\frac{A}{1+K_{\mathrm{p}}} \tag{7-57}$$



式(7－57)代表离散系统在采样瞬时的稳态位置误差，其中

$$K_p=\lim_{z\to1}G(z) \tag{7-58}$$

称为离散系统的静态位置误差系数。

$v=0$ 时，$K_p=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{K_r\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-p_j)}=$ 常数，$e(\infty)=\dfrac{A}{1+K_p}$。

$v=1$ 时，$K_p=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{K_r\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)\prod\limits_{j=1}^{n-1}(z-p_j)}=\infty$，$e(\infty)=0$。

$v=2$ 时，$K_p=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{K_r\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)^2\prod\limits_{j=1}^{n-2}(z-p_j)}=\infty$，$e(\infty)=0$。

2）斜坡输入时的稳态误差

当系统输入为斜坡函数 $r(t)=At$ 时，其 Z 变换函数为

$$R(z)=\frac{ATz}{(z-1)^2}$$

因而稳态误差为

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{AT}{(z-1)[1+G(z)]}=\frac{AT}{\lim\limits_{z\to1}(z-1)G(z)}=\frac{AT}{K_v} \tag{7-59}$$

仿照连续系统，式(7－59)称为速度误差，其中

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z) \tag{7-60}$$

称为离散系统的静态速度误差系数。

$v=0$ 时，$K_v=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{K_r\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(z-p_j)}=0$，$e(\infty)=\infty$。

$v=1$ 时，$K_v=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{K_r\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)\prod\limits_{j=1}^{n-1}(z-p_j)}=$ 常数，$e(\infty)=\dfrac{AT}{K_v}$。

$v=2$ 时，$K_v=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{K_r\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)^2\prod\limits_{j=1}^{n-2}(z-p_j)}=\infty$，$e(\infty)=0$。

3）加速度输入时的稳态误差

当系统输入为加速度函数 $r(t)=At^2/2$ 时，其 Z 变换函数为

$$R(z)=\frac{AT^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

因而稳态误差为

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{AT^2(z+1)}{2(z-1)^2[1+G(z)]}=\frac{AT^2}{\lim\limits_{z\to1}(z-1)^2G(z)}=\frac{AT^2}{K_a} \tag{7-61}$$

式(7-61)称为加速度误差，其中

$$K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2G(z) \tag{7-62}$$

称为离散系统的静态加速度误差系数。

$$v=0\text{ 时},K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2\frac{K_r\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z-p_j)}=0,e(\infty)=\infty。$$

$$v=1\text{ 时},K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2\frac{K_r\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)\prod_{j=1}^{n-1}(z-p_j)}=0,\ e(\infty)=\infty。$$

$$v=2\text{ 时},K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2\frac{K_r\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)^2\prod_{j=1}^{n-2}(z-p_j)}=\text{常数},\ e(\infty)=\frac{AT^2}{K_a}。$$

归纳上述讨论结果，典型输入下不同型别的单位负反馈离散系统的稳态误差列于表7-2。

表7-2　单位负反馈离散系统的稳态误差

输入信号类型 / 系统型别	$r(t)=A\cdot 1(t)$	$r(t)=A\cdot t$	$r(t)=At^2/2$
0型	$A/(1+K_p)$	∞	∞
Ⅰ型	0	AT/K_v	∞
Ⅱ型	0	0	AT^2/K_a

可见，与连续系统相比较，离散系统的速度、加速度稳态误差不仅与 K_v、K_a 有关，而且与采样周期 T 有关。

【思考题】　离散系统的稳定误差如何求解?

7.7　MATLAB 用于离散控制系统分析

可用 MATLAB 对采样控制系统进行数学模型处理、系统分析等工作。同时，也可用 Simulink 直接对采样控制系统进行仿真。

7.7.1　数学模型处理

1. Z 变换和 Z 反变换

MATLAB 符号数学工具箱中的函数 ztrans( ) 和 iztrans( ) 分别用于求符号表达式的 Z 变

换和 Z 反变换，其调用格式如下：

```
F = ztrans(f)
```

F 是默认独立变量 n 的关于符号向量 f 的 Z 变换，在默认情况下就会返回关于 z 的函数。

```
f = iztrans(F)
```

f 是默认独立变量 z 的关于符号向量 F 的 Z 反变换，在默认情况下就会返回关于 n 的函数。

【例 7－12】 求函数 $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$的 Z 变换。

解： 这类问题首先对函数进行拉式反变换，然后再求 Z 变换。MATLAB 命令如下：

```
% example0712.m
syms s                                   % 定义符号变量 s
x = ilaplace((s+3)/(s+1)/(s+2));         % 求出函数的拉式反变换
y1 = ztrans(x)                           % 对 x 求 z 变换
y = simplify(y1)                         % 对结果进行简化
```

运行结果：

```
y1 =2*z/exp(-1)/(z/exp(-1)-1)-z/exp(-2)/(z/exp(-2)-1)
y = z*exp(1)*(z*exp(2)-2+exp(1))/(z*exp(1)-1)/(z*exp(2)-1)
```

【例 7－13】 计算函数 $F(z)=\dfrac{z(1-\mathrm{e}^{-aT})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT})}$的 Z 反变换（T 为采样周期）。

解： 其 MATLAB 命令如下：

```
% example0713.m
syms z a n                                       % 定义符号变量 z,a,n
y = iztrans(z*(1-exp(-a))/(z-1)/(z-exp(-a)))     % 进行 Z 反变换
y1 = simple(y)                                   % 对上述结果进行化简
```

运行结果：

```
y =1 - (1/exp(a))^n
y1 =1 -exp(-a)^n
```


2. 连续系统的离散化

在 MATLAB 中，可以用函数 c2dm( ) 和 dm2c( ) 分别将连续系统离散化和将离散系统模型变换成连续系统模型。，其调用格式如下：

```
[mund,dend] = c2dm(num,den,T,'method')
[num,den] = dm2c(numd,dend,T,'method')
```

其中，numd 与 dend 分别表示离散系统脉冲传递函数的分子与分母多项式系数；num 与 den 分别表示连续系统传递函数的分子与分母多项式系数；T 表示采样周期，'method'表示采用的离散化方法，有多种方法可供选择。该参数默认值为'zoh'，即零阶保持器，表示在连续系统传递函数之前带有零阶保持器；'foh'表示一阶保持器；'tustin'表示双线性逼近方法；'prewarp'表示频域法；'matched'表示零极点匹配法。

【例 7－14】 已知连续系统的传递函数为 $G_{\mathrm{p}}(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，试采用加入零阶保持器的方法将此系统进行离散化，设采样周期 T 为 1s。

解： 其 MATLAB 命令如下：



```
% example0714.m
num=1;                                  % 分子多项式系数
den=[1 1 0];                            % 分母多项式系数
T=1;                                    % 采样周期等于 1
[numd,dend]=c2dm(num,den,T,'zoh')       % 用加入零阶保持器的方法将系统离散化
```

运行结果：

```
mund =    0.3679    0.2642
dend =    1.0000   -1.3679    0.3679
```

7.7.2 动态响应分析

应用 MATLAB 提供的函数 dstep( )、dimpulse( )和 dlsim( )，可以分别用来仿真计算离散系统的单位阶跃响应、单位脉冲响应和任意指定函数响应。函数的调用格式如下：

```
[y,x]=dstep(numd,dend,n)        或      dstep(numd,dend,n)
[y,x]=dimpulse(numd,dend,n)     或      dimpulse(numd,dend,n)
[y,x]=dlsim(numd,dend,u)        或      dlsim(numd,dend,u)
```

其中 y 表示系统的输出响应；x 表示系统的状态响应；n 表示采样次数（可选项）；u 表示任意给定的输入信号序列，其行数应等于采样次数。在上面给出的两种调用格式中，左边列出的调用格式将显示系统输出响应序列，右边列出的调用格式将直接绘出输出响应曲线。

【例 7-15】 离散系统脉冲传递函数为$\dfrac{C(z)}{R(z)}=\dfrac{0.3678z+0.2644}{z^2-z+0.6322}$，求单位阶跃响应曲线。

解：输入以下 MATLAB 命令：

```
% example0715.m
numd=[0.3678 0.2644];           % 分子多项式系数
dend=[1 -1 0.6322];             % 分母多项式系数
dstep(numd,dend)                % 画出离散系统的单位阶跃响应曲线
```

运行结果如图 7.23 所示。

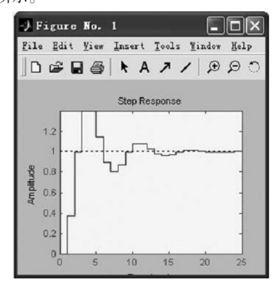


图 7.23　例 7-15 的单位阶跃响应曲线

7.7.3 稳定性分析

利用 MATLAB 可以很方便地对采用控制系统进行稳定性判别，主要方法是判定系统的特征方程的根是否在 Z 平面的单位圆内。

【例 7-16】 某采样控制系统的特征方程为 $D(z)=z^3+2z^2+3z+4=0$，运用 MATLAB 判定系统的稳定性。

解： 其 MATLAB 命令如下：

```
% example0716.m
p=[1 1 -1 0.632];              % 特征方程多项式系数
r=roots(p);                    % 求特征方程的根
x=[-1:0.01:1];                 % 为单位圆定义横坐标
y=sqrt(1-x.^2);                % 单位圆的方程
plot(x,y,x,-y);                % 绘制单位圆
hold on                        % 保持当前图像
plot(r,'xr')                   % 用红色的"x"表示特征方程的根
hold off                       % 取消保持图像
```

运行结果如图 7.24 所示，由图 7.24 可见，有一个特征根在单位圆外，故系统不稳定。

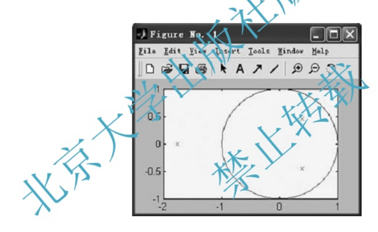


图 7.24 Z 平面上的单位圆与特征根

小　结

离散控制系统一般是指采样控制系统和数字控制系统。与连续系统一样，离散系统研究的问题也主要包括数学模型和系统性能分析。

描述离散系统的时域数学模型是差分方程，经过 Z 变换可以获得离散系统的脉冲传递函数。值得注意的是，在某些采样开关的配置下，可能求不出系统的脉冲传递函数；但在输入信号已知的情况下，总是可以得出输出信号的 Z 变换表达式。

将系统由 S 域映射到 Z 域后，可得到线性离散系统稳定性的充分必要条件，即离散系统特征方程的全部特征根均位于 Z 平面上以原点为圆心的单位圆内。离散系统的稳定性和稳态误差除了与系统固有的结构和参数有关，还与采样周期有关。

通过 Z 变换求解系统的离散输出响应，可以对系统的动态性能进行定性分析与定量

计算。在设计离散系统时，将闭环极点配置在 Z 右半平面的单位圆内的实轴上，并且尽量靠近原点，可以提高系统动态响应速度。

在离散系统中，影响稳态误差的因素更为复杂。稳态误差的大小除了与系统连续部分的结构、参数以及系统外部输入信号有关外，还与采样开关的位置、采样周期的大小有关。

习　题

1. 离散控制系统由哪些基本环节组成？

2. 香农采样定理的意义是什么？

3. 什么是采样或采样过程？

4. 写出零阶保持器的传递函数，引入零阶保持器对系统开环传递函数的极点有何影响？

5. 线性离散控制系统稳定的充要条件是什么？

6. 求下列函数的 Z 变换 $F(z)$。

(1) $f(t)=(t-5T)^2$

(2) $f(t)=t\mathrm{e}^{-at}$

7. 求下列函数的 Z 反变换。

(1) $F(z)=\dfrac{5z^2-17z}{(z-5)(z-1)}$

(2) $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$



8. 设 Z 变换函数为 $E(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)(z^2+7z+5)}$，试利用终值定理确定 $e(\infty)$。

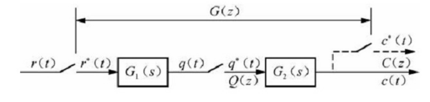
9. 用 Z 变换法求解下列差分方程。

(1) $c(k+2)+3c(k+1)+2c(k)=0$，$c(0)=0$，$c(1)=1$

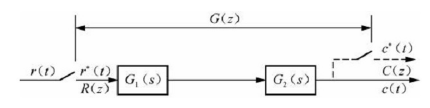
(2) $c(k+2)+2c(k+1)+c(k)=r(k)$，$c(0)=c(1)=0$，$r(k)=k(k=0,1,2,\cdots)$

10. 已知某离散控制系统的差分方程为 $c(k+2)+3c(k+1)+4c(k)=r(k+1)-r(k)$，求该系统的脉冲传递函数。

11. 设两种开环离散系统如题图 7.1 和题图 7.2 所示，其中 $G_1(s)=1/s$，$G_2(s)=a/(s+a)$，输入信号 $r(t)=1(t)$，试求这两种系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 和输出的 Z 变换 $C(z)$。

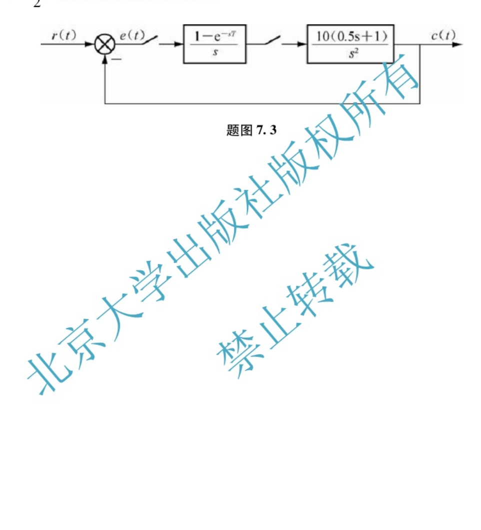


题图 7.1



题图 7.2

12. 已知离散控制系统的结构如题图 7.3 所示，采样周期 $T=0.2\text{s}$，输入信号 $r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$，求该系统的稳态误差。



题图 7.3

第8章

非线性系统分析



教学目的与要求

1. 了解非线性系统动态过程的特点。
2. 理解典型非线性特性对系统动态过程的影响。
3. 掌握非线性系统稳定性分析的方法。
4. 掌握用描述函数法分析非线性系统的方法。
5. 理解相轨迹的绘制方法。
6. 掌握用相平面法分析非线性系统的方法。
7. 了解 MATLAB 分析非线性系统的方法。



知识结构

- 非线性系统分析
  - 非线性系统动态过程的特点
    - 不满足叠加原理
    - 稳定性问题
    - 自持振荡问题
    - 畸变现象
  - 典型的非线性特性
    - 饱和非线性
    - 死区非线性
    - 间隙非线性
    - 继电器非线性
  - 描述函数法及系统分析
    - 描述函数的基本概念
    - 非线性的描述函数
    - 稳定性与自振分析
    - 描述函数分析法
  - 相平面法法及系统分析
    - 相平面图的绘制
    - 奇点与极限环
    - 相平面分析方法
  - MATLAB用于非线性系统分析

实际控制系统中的环节或元件，严格地说，在不同程度上都具有一些非线性因素，因此系统的数学模型也不是线性微分方程。而前面章节是将系统中的非线性特性进行了线性化处理后，近似当作线性系统来研究的，这在解决很大一类控制系统的设计、计算中是行之有效的。但是对某些系统，其非线性特性程度比较明显，有的必须考虑其非线性本质才能得到符合实际的结果，因此，建立非线性数学模型、寻求非线性系统的研究方法是很必要的。

对非线性数学模型，没有普遍适用的研究方法。本章仅对分析非线性系统稳定性的描述函数法和相平面法给以介绍。

8.1 非线性系统动态过程的特点

如果一个控制系统中包含一个或一个以上不能用小信号线性化来处理的非线性环节或元件，则这个系统被称为非线性(控制)系统。如果系统中的非线性特性程度不明显，并满足线性化处理的条件，则可以将系统当作线性系统来处理，这种非线性特性称为非本质非线性。如果系统中的非线性特性程度比较明显，并且不能进行线性化处理，则称这种非线性特性为本质非线性。

非线性系统的运动要比线性系统的运动复杂得多，与线性系统相比，非线性系统具有许多线性系统所没有的特点。

1）非线性系统不满足叠加原理

线性系统用线性微分方程描述，可以利用叠加原理来分析。非线性系统只能用非线性微分方程描述，而非线性微分方程不满足叠加原理，因此，非线性系统不满足叠加原理。

2）非线性系统的稳定性与系统的初始条件和输入信号大小有关

线性系统的稳定性只取决于系统的结构和参数，与系统的初始条件和输入信号的大小无关。而非线性系统的稳定性不但与系统的结构和参数有关，还与系统的初始条件和输入信号大小有关。

对于非线性系统来说，在一定的系统结构和参数条件下，当初始条件在某一范围内时，系统可能是稳定的，而在另一个范围内时，系统可能变为不稳定；当输入信号的某些幅值作用时，系统可能是稳定的，而在另一些幅值作用时，系统可能变为不稳定。因此，系统的结构和参数所决定的稳定性因素是非线性系统稳定性的内在因素，而系统的初始条件和输入信号大小所决定的稳定性因素是非线性系统稳定性的外在因素。在分析非线性系统时，必须分析不同初始条件和输入信号大小所引起的输出响应。

3）非线性系统会产生自持振荡

在没有周期性的外加作用时，线性系统只有处于临界稳定状态时，系统的运动状态才会有等幅振荡，但是这种等幅振荡是暂时的、不稳定的，只要系统中的参数发生微小的变化，系统的临界稳定状态就会消失，系统的状态不是收敛于平衡状态，就是发散至无穷大。

在非线性系统中，即使没有外加作用，系统也可能产生振幅和频率固定的稳定振荡，这种现象称为自持振荡，或称为自激振荡，简称自振。自持振荡是非线性系统所特有的

现象，它具有一定的稳定性，其振荡的振幅和频率由系统本身的结构和参数决定，改变系统的结构和参数，能改变自持振荡的振幅和频率。

在大多数情况下，控制系统不希望产生自持振荡，有害的自持振荡使系统不能稳定运行，严重时会损坏控制系统。但有时也可以利用自持振荡来改善系统的性能。例如，高频小振幅的自持振荡可以克服摩擦、间隙等的影响。

4）非线性系统的畸变现象

对于线性系统，当输入信号为正弦信号时，系统的稳态输出是相同频率的正弦信号，输入信号与输出信号只是幅值和相位不同，因此可以利用频率响应来分析线性系统。

而对于非线性系统来说，当输入信号为正弦信号时，系统的输出一般都不是正弦信号，而是包含有各次谐波分量的非正弦周期信号，而且输出信号的幅频特性可能会出现跳跃和不连续现象。因此，非线性系统不能用频率响应等处理线性系统的方法来分析。

8.2 典型的非线性特性

严格地说，理想的线性系统是不存在的，实际控制系统中元件或环节的非线性有很多种，常见的有饱和非线性、死区非线性、间隙非线性和继电器非线性等。熟悉这些常见的非线性特性及它们对系统动态的影响，有利于了解非线性特性的作用和非线性系统的特点。

8.2.1 饱和非线性特性

饱和非线性特性是指元件在输入信号幅值的一定范围内，输出信号与输入信号之间呈线性关系，当输入信号的幅值超出这一范围时，输出信号为定值。典型的饱和非线性特性如图 8.1 中实线所示，当输入信号 $|x| \leq a$ 时，输出信号 y 与 x 呈线性关系；当输入信号 $|x| > a$ 时，输出信号 y 为常量 b。该饱和非线性特性的数学表达式为

$$y = \begin{cases} kx & |x| \leq a \\ b\,\mathrm{sgn}x & |x| > a \end{cases} \tag{8-1}$$

式(8-1)中 k 为饱和非线性特性线性区的斜率，a 是线性区的宽度。

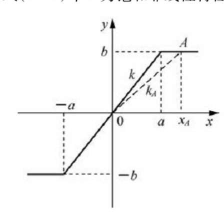


图 8.1 饱和非线性特性

自饱和非线性特性的坐标原点至饱和区上任意一点 A 绘一条直线，该直线的斜率 k_A 表示 A 点处的等效增益，如图 8.1 中虚线所示。当 A 在饱和区上变化时，其等效增益 $k_A \leq k$，当 x_A 增大时，k_A 减小，说明饱和非线性特性相当于在系统中增加了一个变增益元件，输入信号幅值越大，等效增益越小。

在一般情况下，饱和非线性特性在大输入信号作用时等效增益很低，降低了系统的开环增益，从而导致系统过渡过程时间的增加和稳态误差的变大，提高了系统的相对稳定性。

在某些控制系统中，往往主动设置饱和非线性特性，例如，在双闭环直流调速系统中，把速度调节器和电流调节器设计成具有饱和非线

性特性，可以限制电机的起动电流和最大加速度，从而改善系统的动态性能，保证电气和机械系统的安全运行。

8.2.2 死区非线性特性

死区非线性特性又称为不灵敏区非线性特性，是指元件在输入信号幅值未超过某一范围时，输出信号幅值为0，只有当输入信号幅值超过这一范围时，才有输出信号产生。在控制系统中，很多测量元件、放大元件、执行元件都存在死区，常见的死区非线性特性如图8.2中实线所示。从图中可以看出，当输入信号$|x|\leqslant a$时，输出信号$y=0$；当输入信号$|x|>a$时，输出信号y与输入信号x呈线性关系。该饱和非线性特性的数学表达式为

$$y=\begin{cases}0 & |x|\leqslant a\\ k(x-\mathrm{sgn}x) & |x|>a\end{cases} \tag{8-2}$$

式(8-2)中k为死区非线性特性线性区的斜率，a是死区的范围。

自死区非线性特性的坐标原点至线性区任意一点A绘一条直线，该直线的斜率k_A表示A点处的等效增益，如图8.2中虚线所示。显然，当A在线性区上变化时，其等效增益k_A总是小于线性区的斜率k，当x_A增大时，k_A增大，当$x_A\to\infty$时，$k_A=k$。因此，死区非线性特性相当于在系统中增加了一个变增益元件，输入信号幅值越小，等效增益越小，在死区范围内，等效增益为0。

图8.2 死区非线性特性

死区非线性特性降低了系统的开环增益，使系统的稳定误差增大，可以提高系统的相对稳定性，减少系统响应的振荡倾向。此外，死区非线性特性还可以滤除从输入端引入的小幅值干扰信号，从而提高系统的抗干扰能力。

8.2.3 间隙非线性特性

间隙非线性特性一般是元件的滞后作用引起的，如铁磁材料中的磁滞、齿轮传动中的间隙等。间隙非线性特性如图8.3所示。从图中可以看出，由于间隙存在，当输入信号的变化方向改变时，输出信号保持不变；当输入信号反方向变化$2a$以后，输出信号才随输入信号线性变化。该间隙非线性特性的数学表达式为

$$y=\begin{cases}k(x-a) & \dot{y}>0\\ b\mathrm{sgn}x & \dot{y}=0\\ k(x+a) & \dot{y}<0\end{cases} \tag{8-3}$$

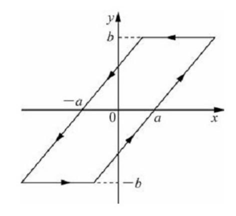


图8.3 间隙非线性特性

式(8-3)中k为间隙非线性特性线性区的斜率，a为间隙的宽度。可见，间隙的非线性特性是多值的，其输出信号的大小不仅与输入信号的大小有关，还与输入信号的变化方向有关。

间隙非线性特性降低了系统的定位精度，使输出在



相位上产生滞后，相当于给开环系统引入了一个负的相位移，使系统线性部分的相角裕度减少，动态响应性能变差，增大系统的震荡倾向。

8.2.4　继电器非线性特性

继电器在工作时，当线圈两端的电压大于某一定值后，继电器吸合；当线圈两端的电压小于某一定值后，继电器释放。继电器的吸合电压一般大于其释放电压，所以实际的继电器非线性特性既有死区，又有滞环，其非线性特性如图 8.4(a)所示。该继电器非线性特性的数学表达式为

$$y=\begin{cases}-b & x\leqslant -ma,\dot{x}>0\\ 0 & -ma<x<a,\dot{x}>0\\ b\operatorname{sgn}x & |x|\geqslant a\\ 0 & -a<x<ma,\dot{x}<0\\ b & x\geqslant ma,\dot{x}<0\end{cases}\tag{8-4}$$

式(8－4)中 a 表示继电器的吸合电压，ma 表示继电器的释放电压，b 为继电器的饱和输出。

当继电器的吸合电压与释放电压反向相等时，即 $m=-1$ 时，继电器的非线性特性如图 8.4(b)所示，此时，称其为具有滞环的继电器非线性特性。

当继电器的吸合电压与释放电压相等时，即 $m=1$ 时，继电器的非线性特性如图 8.4(c)所示，此时，称其为具有死区的继电器非线性特性。

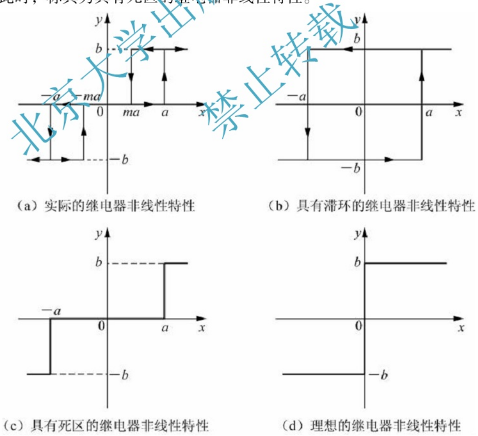


图 8.4　继电器非线性特性

如果继电器的吸合电压和释放电压为0，继电器的非线性特性如图8.4(d)所示，此时，称其为理想的继电器非线性特性。从图中可以看出，理想继电器非线性特性在输入信号变化很小时输出信号发生突变，即在原点附近其等效增益趋于无穷，输入信号幅值在增大，输出信号保持常量不变。

继电器非线性特性一般会增加系统的稳态误差，使系统产生自持振荡，甚至使系统不稳定。

【思考题】 将饱和非线性和死区非线性组合在一起，会呈现什么样的非线性?

8.3 描述函数

8.3.1 谐波线性化

对于给定的非线性元件或环节来说，当其输入信号为一正弦信号时，其输出一般不是正弦信号，而是一个含有各次谐波的非正弦周期信号。假设非线性元件或环节的输入信号为 $x(t)=A\sin\omega t$，其输出信号用 $y(t)$ 表示，则 $y(t)$ 是一个非正弦周期信号，其傅里叶级数展开式为

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n\sin(n\omega t + \varphi_n) \qquad (8-5)$$

式(8-5)中的 A_0 为 $y(t)$ 的直流分量，A_n 为 n 次谐波的余弦分量幅值，B_n 为 n 次谐波的正弦分量幅值，Y_n 为 n 次谐波分量的幅值，φ_n 为 n 次谐波分量的相位角。其中

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\mathrm{d}\omega t$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos n\omega t\mathrm{d}\omega t$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin n\omega t\mathrm{d}\omega t$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan\frac{A_n}{B_n}$$

式(8-5)表明非线性元件或环节的输出 $y(t)$ 中含有直流分量、基波和高次谐波，一般谐波的次数越高，相应的谐波分量幅值与基波分量幅值之比就越小。如果非线性元件或环节的非线性特性具有中心对称性质，则直流分量等于0，即 $A_0=0$。如果系统的线性部分具有低通滤波特性，能把输出 $y(t)$ 中的高次谐波分量滤掉，只剩下基波分量，则输出 $y(t)$ 的基波分量能近似地代替非线性元件或环节的实际输出，即

$$y(t) \approx y_1(t) = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t = Y_1\sin(\omega t + \varphi_1) = Y_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} \qquad (8-6)$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t \qquad (8-7)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t \qquad (8-8)$$

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \tag{8-9}$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{A_1}{B_1} \tag{8-10}$$

根据上面的分析可知，如果一个非线性元件或环节的非线性特性具有中心对称性，则在正弦输入信号的作用下，其输出可以近似地看成一个同频率的正弦量，只是在幅值和相位上发生了变化，这种处理方法被称为谐波线性化。这种谐波线性化是在正弦输入条件下进行的，只适合分析非线性系统的自持振荡，与小偏差线性化有本质区别。

【思考题】 谐波线性化与小偏差线性化的区别是什么？

8.3.2 非线性特性的描述函数

在正弦信号 $x(t) = A\sin\omega t$ 作用于非线性元件或环节时，将其输出信号 $y(t)$ 的基波分量的相量与输入正弦信号的相量之比，称为该非线性元件或环节的描述函数，用 $N(A)$ 表示，即

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1} \tag{8-11}$$

式(8-11)中 A 为输入正弦信号 $x(t)$ 的幅值，Y_1、φ_1 分别为 $y(t)$ 基波分量的幅值和相位角。描述函数 $N(A)$ 还可以表示为

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j\arctan A_1/B_1} = \frac{Y_1}{A}\cos\varphi_1 + j\frac{Y_1}{A}\sin\varphi_1 = \frac{B_1 + jA_1}{A} \tag{8-12}$$

1. 饱和非线性特性的描述函数

由饱和非线性特性的特点可知，当输入信号幅值较小时，输出信号与输入信号成比例；当输入信号幅值较大时，输出信号为一定值。饱和非线性特性在正弦输入信号作用下的输出信号波形如图8.5所示。设输入信号为 $x(t) = A\sin\omega t$，则输出信号 $y(t)$ 的数学表达式为

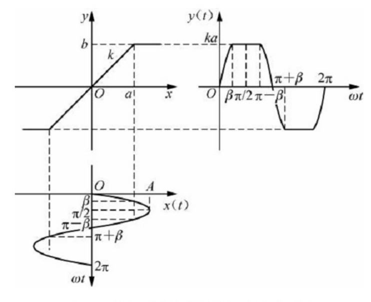


图8.5　饱和非线性特性输入/输出波形图

$$y(t)=\begin{cases}kA\sin\omega t & 0\leqslant\omega t\leqslant\beta\\ ka & \beta\leqslant\omega t\leqslant\pi-\beta\\ kA\sin\omega t & \pi-\beta\leqslant\omega t\leqslant\pi\end{cases}$$

其中 k、a 分别为饱和非线性特性线性区的斜率和宽度，$\beta=\arcsin\dfrac{a}{A}$。

由于饱和非线性特性是单值奇对称函数，输出函数 $y(t)$ 是一个周期性函数，并且它的傅里叶级数展开式中 $A_0=0$、$A_1=0$、$\varphi_1=0$。将 $y(t)$ 代入式(8－8)中计算 B_1 的值，可得

$$\begin{aligned}B_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\beta}kA\sin\omega t\sin\omega t\mathrm{d}\omega t+\int_{\beta}^{\pi/2}ka\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\right)\\&=\frac{4kA}{\pi}\left(\int_0^{\beta}\frac{1-\cos2\omega t}{2}\mathrm{d}\omega t+\frac{a}{A}\int_{\beta}^{\pi/2}\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\right)\\&=\frac{4kA}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\omega t-\frac{1}{4}\sin2\omega t\right)\Bigg|_0^{\beta}-\frac{a}{A}\cos\omega t\Bigg|_{\beta}^{\pi/2}\right]\\&=\frac{4kA}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\sin2\beta\right)+\frac{a}{A}\cos\beta\right]\\&=\frac{2kA}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

由式(8－12)可得饱和非线性特性的描述函数为

$$N(A)=\frac{B_1+\mathrm{j}A_1}{A}=\frac{B_1}{A}=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\quad(A\geqslant a)\qquad(8-13)$$

它是输入正弦信号幅值 A 的函数，相当于增益可变的放大环节。在实际应用中，经常用到描述函数的负倒数 $-\dfrac{1}{N(A)}$，称其为描述函数的负倒数特性。

2. 死区非线性特性的描述函数

死区非线性特性在正弦输入信号作用下的输出信号波形如图8.6所示。设输入信号为 $x(t)=A\sin\omega t$，则输出信号 $y(t)$ 的数学表达式为

$$y(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant\omega t\leqslant\beta\\ k(A\sin\omega t-a) & \beta\leqslant\omega t\leqslant\pi-\beta\\ 0 & \pi-\beta\leqslant\omega t\leqslant\pi\end{cases}$$

其中 k、a 分别为死区非线性特性的线性区斜率和死区宽度，$\beta=\arcsin\dfrac{a}{A}$。

由于死区非线性特性是单值奇对称函数，所以输出函数 $y(t)$ 的傅里叶级数展开式中 $A_0=0$、$A_1=0$、$\varphi_1=0$。将 $y(t)$ 代入式(8－8)中计算 B_1 的值，可得

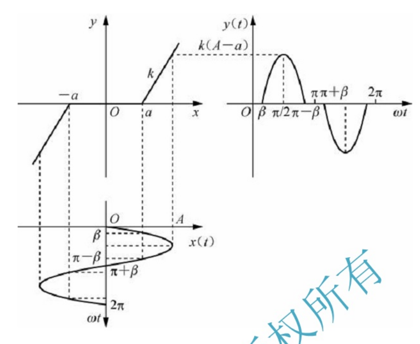


图 8.6 死区非线性特性输入输出波形图

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_\beta^{\pi/2} k(A\sin\omega t - a)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t \\
&= \frac{4kA}{\pi}\int_\beta^{\pi/2}\sin^2\omega t\mathrm{d}\omega t - \frac{4ka}{\pi}\int_\beta^{\pi/2}\sin\omega t\mathrm{d}\omega t \\
&= \frac{4kA}{\pi}\int_\beta^{\pi/2}\frac{1-\cos2\omega t}{2}\mathrm{d}\omega t - \frac{4ka}{\pi}\int_\beta^{\pi/2}\sin\omega t\mathrm{d}\omega t \\
&= \frac{4kA}{\pi}\left(\frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{4}\sin2\omega t\right)\Bigg|_\beta^{\pi/2} + \frac{4ka}{\pi}\cos\omega t\Bigg|_\beta^{\pi/2} \\
&= \frac{4kA}{\pi}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\sin2\beta\right) - \frac{4ka}{\pi}\cos\beta \\
&= \frac{4kA}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{a}{A} + \frac{a}{2A}\cos\left(\arcsin\frac{a}{A}\right) - \frac{a}{A}\cos\left(\arcsin\frac{a}{A}\right)\right] \\
&= \frac{2kA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{A} - \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]
\end{aligned}
$$

将 B_1 的值代入到式(8－12)，得到死区非线性特性的描述函数为

$$
N(A) = \frac{B_1 + \mathrm{j}A_1}{A} = \frac{B_1}{A} = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{A} - \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right] \quad (A \geqslant a) \qquad (8-14)
$$

3. 间隙非线性特性的描述函数

间隙非线性特性在正弦输入信号作用下的输出信号波形如图 8.7 所示。设输入信号为 $x(t) = A\sin\omega t$，则输出信号 $y(t)$ 的数学表达式为

$$y(t)=\begin{cases}k(A\sin\omega t-a) & 0\leqslant\omega t\leqslant\pi/2\\ k(A-a) & \pi/2\leqslant\omega t\leqslant\pi-\beta\\ k(A\sin\omega t+a) & \pi-\beta\leqslant\omega t\leqslant\pi\end{cases}$$

其中 k、a 分别为间隙非线性特性的线性区斜率和间隙范围，$\beta=\arcsin\dfrac{A-2a}{A}$。

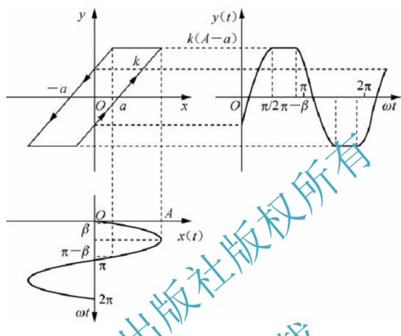


图8.7 间隙非线性特性输入/输出波形图

由于间隙非线性特性是非单值奇对称函数，且输出函数 $y(t)$ 关于 ωt 轴上下对称，所以 $y(t)$ 的傅里叶级数展开式中 $A_0=0$、A_1、B_1、φ_1 不等于0。将 $y(t)$ 分别代入式(8-7)和式(8-8)中计算 A_1、B_1 的值，可得

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}k(A\sin\omega t-a)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t+\int_{\pi/2}^{\pi-\beta}k(A-a)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t+\int_{\pi-\beta}^{\pi}k(A\sin\omega t+a)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t\right]\\&=\frac{4ka}{\pi}\left(\frac{a}{A}-1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}k(A\sin\omega t-a)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t+\int_{\pi/2}^{\pi-\beta}k(A-a)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t+\int_{\pi-\beta}^{\pi}k(A\sin\omega t+a)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t\right]\\&=\frac{kA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right)+2\left(1-\frac{2a}{A}\right)\sqrt{\frac{a}{A}-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

将 A_1、B_1 的值代入到式(8-12),得到间隙非线性特性的描述函数为

$$N(A)=\frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right)+2\left(1-\frac{2a}{A}\right)\sqrt{\frac{a}{A}-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]+\mathrm{j}\frac{4ka}{\pi A}\left(\frac{a}{A}-1\right)\quad(A\geqslant a)\tag{8-15}$$

由式(8-15)可知，间隙非线性特性使输出函数 $y(t)$ 的基波分量产生滞后的相移，并且$\frac{a}{A}$的比值越大，相位滞后的越多。

4. 继电器非线性特性的描述函数

实际继电器非线性特性在正弦输入信号作用下的输出信号波形如图 8.8 所示。设输入信号为 $x(t)=A\sin\omega t$，则输出信号 $y(t)$ 的数学表达式为

$$y(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant\omega t\leqslant\beta_1\\ b & \beta_1\leqslant\omega t\leqslant\pi-\beta_2\\ 0 & \pi-\beta_2\leqslant\omega t\leqslant\pi\end{cases}$$

其中 b 表示继电器非线性特性的饱和输出，$\beta_1=\arcsin\frac{a}{A}$，$\beta_2=\arcsin\frac{ma}{A}$，$a$、$ma$ 分别表示继电器的吸合电压与释放电压。

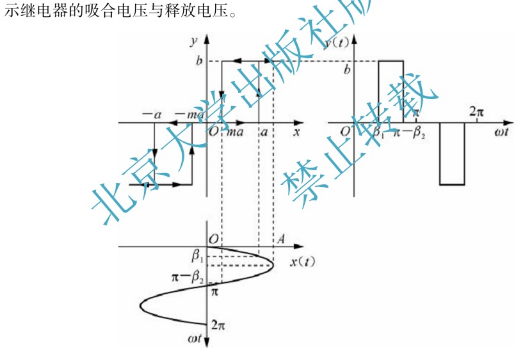


图 8.8 实际继电器非线性特性输入/输出波形图

从图 8.8 中可以看出，输出信号 $y(t)$ 为奇函数，所以 $y(t)$ 的傅里叶级数展开式中 $A_0=0$、A_1、B_1、φ_1 不等于 0。将 $y(t)$ 分别代入式(8-7)和式(8-8)中计算 A_1、B_1 的值，可得

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\cos\omega t\mathrm{d}\omega t\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\beta_1}^{\pi-\beta_2} b\cos\omega t\mathrm{d}\omega t$$

$$= \frac{2b}{\pi}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

$$= \frac{2ab}{\pi A}(m-1)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(t)\sin\omega t\mathrm{d}\omega t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\beta_1}^{\pi-\beta_2} b\sin\omega t\mathrm{d}\omega t$$

$$= -\frac{2b}{\pi}[\cos(\pi-\beta_2) - \cos\beta_1]$$

$$= \frac{2b}{\pi}\left[\sqrt{1-\left(\frac{ma}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$$

将 A_1、B_1 的值代入式(8-12)，得到继电器非线性特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{2b}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{ma}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right] + \mathrm{j}\frac{2ab}{\pi A^2}(m-1) \quad (A \geqslant a) \qquad (8-16)$$

由式(8-16)可知，$N(A)$ 是关于 m 和 a 的函数，当 m 和 a 取不同数值时，可以得到不同的描述函数。

当 $m=-1$ 时，继电器非线性特性变为具有滞环的继电器非线性特性，将 $m=-1$ 代入式(8-16)，可得

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} - \mathrm{j}\frac{4ab}{\pi A^2} \quad (A \geqslant a) \qquad (8-17)$$

当 $m=1$ 时，继电器非线性特性变为具有死区的继电器非线性特性，将 $m=1$ 代入式(8-16)，可得

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} \quad (A \geqslant a) \qquad (8-18)$$

当 $a=0$ 时，继电器非线性特性变为理想的继电器非线性特性，将 $a=0$ 代入式(8-16)，可得

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \qquad (8-19)$$

为了查阅方便，将几种常见的非线性特性及其描述函数列于表8-1中。

表8-1 常见的非线性特性及其描述函数

非线性名称	非线性特性	描述函数
饱和非线性	y, b, k, −a, 0, a, x, −b	$N(A) = \frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right] \quad (A \geqslant a)$

续表

非线性名称	非线性特性	描述函数
死区非线性		$N(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{A}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\quad (A\geqslant a)$
具有死区的饱和非线性		$N(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a_2}{A}-\arcsin\frac{a_1}{A}+\frac{a_2}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a_2}{A}\right)^2}-\frac{a_1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a_1}{A}\right)^2}\right]$ $(A\geqslant a_2)$
具有死区的线性非线性		$N(A)=k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\quad (A\geqslant a)$
变增益非线性		$N(A)=k_2+\frac{2(k_1-k_2)}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\quad (A\geqslant a)$
间隙非线性		$N(A)=\frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(1-\frac{2a}{A}\right)+2\left(1-\frac{2a}{A}\right)\sqrt{\frac{a}{A}-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]+\mathrm{j}\frac{4ka}{\pi A}\left(\frac{a}{A}-1\right)$ $(A\geqslant a)$
具有死区和滞环的继电器非线性		$N(A)=\frac{2b}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{ma}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]+\mathrm{j}\frac{2ab}{\pi A^2}(m-1)\quad (A\geqslant a)$
具有滞环的继电器非线性		$N(A)=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{4ab}{\pi A^2}\quad (A\geqslant a)$
具有死区的继电器非线性		$N(A)=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\quad (A\geqslant a)$

续表

非线性名称	非线性特性	描述函数
理想继电器非线性、库仑摩擦非线性		$N(A)=\frac{4b}{\pi A}$
库仑摩擦加粘性摩擦非线性		$N(A)=k+\frac{4b}{\pi A}$
三次曲线非线性	$y=ax^3$	$N(A)=\frac{3a}{4}A^2$

【思考题】　简述非线性特性描述函数的求解方法?

8.4　描述函数法及系统分析

描述函数法是基于谐波线性化的非线性系统分析方法。由于描述函数是非线性元件或环节在正弦输入信号的作用下，用输出信号的基波分量来代替或近似地代替实际的输出信号，所以描述函数法是一种近似方法，不像线性系统中的频率特性那样能全面描述系统的特征，只能用于近似分析系统的稳定性和自持振荡。

8.4.1　非线性系统的典型结构

一般地，非线性系统通过结构图的简化，都可以变换成如图8.9所示的典型结构。图中 $N(A)$ 是非线性环节的描述函数，相当于非线性环节；$G(s)$ 是线性环节的传递函数，相当于线性环节。

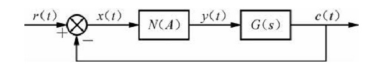


图 8.9　非线性系统的典型结构图

假设系统的输入信号 $r(t)=0$，非线性环节的输入信号 $x(t)$ 为正弦信号，其输出信号 $y(t)$ 为非正弦周期信号，由于常见的非线性环节的非线性特性是奇对称的，所以输出信号 $y(t)$ 的傅里叶级数展开式中只含有基波分量和高次谐波分量，而不含直流分量，并且基波分量的幅值最大，高次谐波分量的幅值较小。因此，非线性环节的输出信号 $y(t)$ 是一个以基波分量为主、高次谐波分量为辅的奇对称非线性函数。

非线性环节的输出信号 $y(t)$ 经线性部分的传输成为系统的输出信号 $c(t)$，$c(t)$ 中含有与 $y(t)$ 的各次谐波频率相对应的分量。如果系统的线性部分具有良好的低通滤波特性，就能把 $y(t)$ 中的高次谐波分量滤掉，只剩下基波分量，此时 $c(t)$ 中就以 $y(t)$ 的基波分量为主，相当于 $y(t)$ 可以用其傅里叶级数展开式的基波分量来代替，即非线性环节的非线性特性可以用描述函数来表示。

通过以上分析，可以得出非线性系统能够用描述函数法分析的基本条件为：

（1）非线性系统可以化为图 8.9 所示的典型结构。

（2）非线性系统的输入信号 $r(t)=0$，非线性环节的输入信号 $x(t)$ 为正弦信号。

（3）非线性环节的非线性特性不是时间的函数，且具有奇对称性。

（4）非线性环节的输出信号 $y(t)$ 的基波分量幅值最大，高次谐波分量幅值较小。

（5）线性环节的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 是最小相位系统，且具有良好的低通滤波特性。

8.4.2 非线性系统的稳定性分析

在图 8.9 所示的非线性系统中，假设线性环节是开环稳定的，将非线性环节用描述函数表示后，系统的闭环频率特性为

$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{N(A)G(\mathrm{j}\omega)}{1+N(A)G(\mathrm{j}\omega)}$$

特征方程为

$$1+N(A)G(\mathrm{j}\omega)=0$$

或写作

$$G(\mathrm{j}\omega)=-\frac{1}{N(A)} \tag{8-20}$$

式(8-20)表明非线性系统中线性环节的开环幅相频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与非线性环节的描述函数负倒数特性 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交。因此，$G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线的相对位置，决定了非线性系统的稳定性。

在进行非线性系统的稳定性判断时，由于非线性环节的存在，判断系统稳定的参考点不再是线性系统中的$(-1,\mathrm{j}0)$，而是一条参考线 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线。这样，奈奎斯特稳定判据就可以应用于非线性系统稳定性的判断。

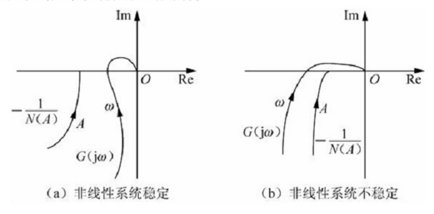


图 8.10 非线性系统稳定性判断

如果 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线顺时针不包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线，则该非线性系统稳定，如图 8.10(a) 所示；如果 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线顺时针包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线，则该非线性系统不稳定，如图 8.10(b) 所示。

8.4.3 自振分析

自持振荡是非线性系统所特有的特性，常采用描述函数法分析自持振荡。如果 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交，即 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围部分 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线，则非线性系统会产生等幅振荡。自持振荡的振幅和振荡频率可由 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线的交点求得，即振幅可以用交点处 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线上的 A 表示，频率可以用交点处 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线上的 ω 表示。但应注意，并非所有的交点都能产生自持振荡，只有稳定的交点才能产生自持振荡。

假设 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交于 B、C 两点，如图 8.11 所示。设非线性系统工作于 B 点，若系统受到微小的扰动，使振荡的振幅减小，工作点将沿 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线移动到 B_1 点，由于 B_1 点被 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围，此时系统是不稳定的，从而使系统振荡加剧，导致振荡振幅的增大，工作点将 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线上移，最终返回到 B 点。若系统受到微小的扰动，使振荡的振幅增大，工作点将移动到 B_2 点，由于 B_2 点不被 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围，此时系统是稳定的，从而使系统振荡减弱，导致振荡振幅的减小，工作点将下移，最终返回到 B 点。可见 B 点是稳定的工作点，可以形成自持振荡。

图 8.11 非线性系统的自振分析

设非线性系统工作于 C 点，若系统受到微小的扰动，使振荡的振幅减小，工作点将移动到 C_1 点，由于 C_1 点不被 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围，此时系统是稳定的，振荡振幅将减小，工作点将下移。若系统受到微小的扰动，使振荡的振幅增大，工作点将移动到 C_2 点，由于 C_2 点被 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围，此时系统是不稳定的，振荡振幅的增大，工作点将上移，最终移动到 B 点。可见 C 点是不稳定的工作点，不能形成自持振荡。

根据以上分析可知，当 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线相交时，如果交点是 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线沿 A 增加的方向进入 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线所包围的范围，则该交点是不稳定的工作点。如果交点是 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线沿 A 增加的方向离开 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线所包围的范围，则该交点是稳定的工作点。自持振荡的振幅和频率可由稳定工作点对应的 A 和 ω 求得。

一般地，控制系统不希望产生自持振荡，在设计系统时，可以通过改变线性环节的参数、对线性环节进行校正以及改变非线性特性等方法，尽量避免自持振荡的产生。

8.4.4 用描述函数法分析非线性系统

用描述函数法分析非线性系统，主要是分析系统的稳定性和自持振荡问题，下面通过例题进行介绍。

【例 8-1】 含有理想继电器非线性特性的非线性系统结构如图 8.12 所示，已知理想继电器非线性特性的饱和输出 $b=1$，线性部分的 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$，试求系统产生自持振荡时的振幅和频率。

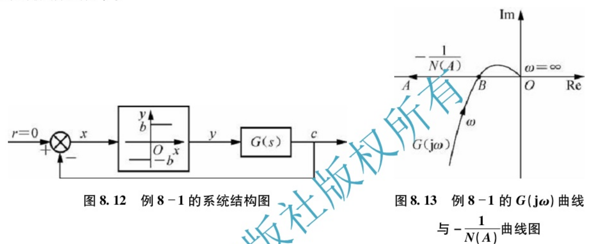


图 8.12 例 8-1 的系统结构图

图 8.13 例 8-1 的 $G(j\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线图

解： 理想继电器非线性特性的描述函数 $N(A)=\dfrac{4b}{\pi A}$，已知线性部分的传递函数 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$，则其频率特性为 $G(j\omega)=\dfrac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$，做出 $G(j\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线，并设它们相交于 B 点，如图 8.13 所示。由于 B 点是 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线沿 A 增加的方向离开 $G(j\omega)$ 曲线所包围的范围，所以 B 点是稳定的工作点，可以产生自持振荡。

由于

$$
\begin{aligned}
G(j\omega)&=\frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}\\
&=\frac{10(-j\omega)(1-j\omega)(2-j\omega)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+2^2)}\\
&=\frac{-10(2j\omega+3\omega^2-j\omega^3)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\\
&=\frac{-30}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}+j\frac{-10(2\omega-\omega^3)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)}
\end{aligned}
$$

令 $G(j\omega)$ 的虚部为 0，即 $\mathrm{Im}\,[G(j\omega)]=\dfrac{-10(2\omega-\omega^3)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)}=0$，可得

$$
\begin{cases}\omega=0\\ \omega=\sqrt{2}\end{cases}
$$

其中 $\omega=\sqrt{2}$ 为自振频率。

将 $\omega=\sqrt{2}$ 代入 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的实部，可得

$$\mathrm{Re}\left[G(\mathrm{j}\omega)\right]=\frac{-30}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\Big|_{\omega=\sqrt{2}}=\frac{-30}{(2+1)(2+4)}=-\frac{5}{3}$$

当发生自持振荡时，满足条件 $G(\mathrm{j}\omega)=-\dfrac{1}{N(A)}$，所以有

$$-\frac{5}{3}=-\frac{\pi A}{4b}$$

又因为 $b=1$，所以可得

$$A=\frac{20}{3\pi}\approx 2.12$$

因此，系统产生自持振荡时的振幅为 2.12，频率为 $\sqrt{2}$ rad/s。

【例 8-2】 含有饱和非线性特性的非线性系统结构如图 8.14 所示，已知理想饱和非线性特性的 $a=1$、$k=2$，线性部分的 $G(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$，试计算系统处于稳定时线性部分放大系数 K 的临界值。

图 8.14 例 8-2 的系统结构图

解：已知 $a=1$，$k=2$，$G(s)=\dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$。

饱和非线性特性的描述函数

$$N(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\quad(A\geqslant a)$$

其描述函数的负倒数特性

$$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi}{2k\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]}=\frac{-\pi}{4\left[\arcsin\frac{1}{A}+\frac{1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}\right]}$$

可以得出，当 $A=a=1$ 时，$-\dfrac{1}{N(A)}=-0.5$；当 A 趋于无穷时，$-\dfrac{1}{N(A)}=-\infty$。因此，$-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线为负实轴上的 $-0.5\sim-\infty$。要想使系统处于稳定，$G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线应不与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线相交，当两者相交时，在交点处系统处于临界稳定状态，如图 8.15 所示，图中的 B 点为临界稳定点，当 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与负实轴的交点位于 B 点右侧时，系统稳定。

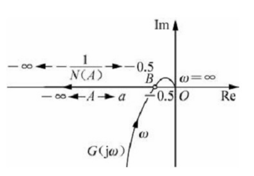


图 8.15 例 8-2 的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线图

线性部分的频率特性

$$
\begin{aligned}
G(\mathrm{j}\omega) &= \frac{K}{\mathrm{j}\omega(0.1\mathrm{j}\omega+1)(0.2\mathrm{j}\omega+1)} \\
&= \frac{K(-\mathrm{j}\omega)(1-0.1\mathrm{j}\omega)(1-0.2\mathrm{j}\omega)}{\omega^2(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)} \\
&= \frac{-K\mathrm{j}(1-0.3\mathrm{j}\omega+0.02\omega^2)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)} \\
&= \frac{-0.3K}{(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)} + \mathrm{j}\frac{-K(1-0.02\omega^2)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)}
\end{aligned}
$$

令 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的虚部为0，即 $\mathrm{Im}\left[G(\mathrm{j}\omega)\right] = \dfrac{-K(1-0.02\omega^2)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)} = 0$，可得 $\omega = \sqrt{50}$ rad/s。

将 $\omega = \sqrt{50}$ 代入到 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的实部，可得

$$
\mathrm{Re}\left[G(\mathrm{j}\omega)\right] = \frac{-0.3K}{(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)}\Big|_{\omega=\sqrt{50}} = \frac{-0.3K}{(1+0.5)(1+2)} = -\frac{0.3K}{4.5}
$$

根据前面分析可知，当 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线通过 B 点$(-0.5,\ \mathrm{j}0)$时，系统处于临界稳定状态，即

$$
-\frac{0.3K}{4.5} = -0.5
$$

则可以求出系统稳定时线性部分放大系数 K 的临界值 $K=7.5$。

8.4.5 非线性系统结构图的简化

当非线性系统结构图中的非线性环节多于一个时，需要对结构图进行简化，化为只含有一个非线性特性的结构图。由于非线性特性的特殊性，不能简单地将每个非线性的描述函数求出后进行等效，而是按信号传输的等效性求出等效的非线性特性，再求出等效的非线性特性的描述函数。

当两个非线性环节并联时，如图8.16所示，假设输入信号为正弦信号，即

$$
x(t) = A\sin\omega t
$$

两个非线性环节的描述函数分别为 $N_1(A)$ 和 $N_2(A)$，则输出信号 $y(t)$ 可以表示为

$$
y(t) = y_1(t) + y_2(t) = N_1(A)x(t) + N_2(A)x(t) = \left[N_1(A) + N_2(A)\right]x(t) = N(A)x(t)
$$

可见，简化后的非线性特性的描述函数为

$$
N(A) = N_1(A) + N_2(A)
$$

当两个非线性环节串联时，如图8.17所示，要结合每个非线性环节的非线性特性，按照信号传输的等效性，将两个非线性特性进行简化。例如，将一个具有死区非线性特性的非线性环节与一个具有饱和非线性特性的非线性环节串联，可以简化为一个具有死

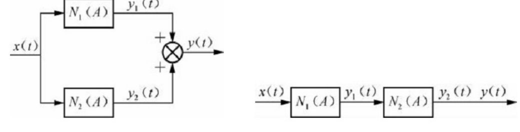


图8.16　两个非线性环节的并联　　**图8.17　两个非线性环节的串联**

区的饱和非线性环节，如图 8.18 所示。图中 N_1 为死区非线性，N_2 为饱和非线性，N 为简化后的具有死区的饱和非线性。

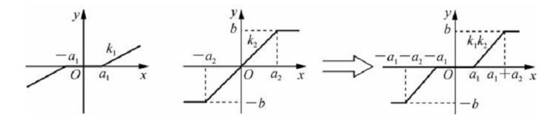


图 8.18 死区非线性和饱和非线性的串联简化

【例 8-3】 非线性系统结构如图 8.19 所示，图中 $a_1=a_2=1$，$b_1=b_2=2$，$G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)^2}$。试求两个非线性环节串联后的等效描述函数，并判断系统是否存在产生自持振荡，如果存在，则求出振荡时的振幅和角频率。

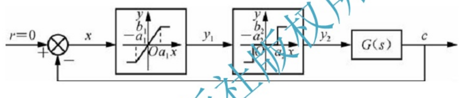


图 8.19 例 8-3 的系统结构图

解：由于 $a_1=a_2=1$，$b_1=b_2=2$，所以第一个非线性特性的斜率 $k_1=2$。当输入信号的幅值为 0.5 时，第一个非线性环节的输出为 1，恰好为第二个非线性环节的死区宽度 a_2。因此，两个非线性环节串联后等效为一个具有死区的继电器非线性特性，且死区宽度 $a=0.5$，其描述函数为

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\quad(A\geqslant a,\ a=0.5,\ b=2)$$

描述函数的负倒数特性为

$$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi A}{4b}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}}\quad(A\geqslant a,\ a=0.5,\ b=2)$$

对该式求导，并令导数等于零，可以求出当 $A=\sqrt{2}a$ 时描述函数负倒数特性取最大值，即描述函数负倒数曲线在负实轴上，且在 $A=\sqrt{2}a=0.707$ 时取得最大值，最大值为 -0.393。

线性部分的频率特性

$$\begin{aligned}G(\mathrm{j}\omega)&=\frac{10}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)^2}=\frac{10(-\mathrm{j}\omega)(1-\mathrm{j}\omega)^2}{\omega^2(1+\omega^2)^2}\\&=\frac{-10\mathrm{j}(1-2\mathrm{j}\omega-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^2}\\&=\frac{-20\omega}{\omega(1+\omega^2)^2}+\mathrm{j}\frac{10(\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2)^2}\end{aligned}$$

令 $G(j\omega)$ 的虚部为0，即 $\mathrm{Im}[G(j\omega)]=\frac{10(\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2)^2}=0$，可得 $\omega=1\mathrm{rad/s}$。此时，$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=\left.\frac{-20\omega}{\omega(1+\omega^2)^2}\right|_{\omega=1}=\frac{-20\times1}{1\times(1+1^2)^2}=-5$，即 $G(j\omega)$ 曲线与负实轴相交于$(-5, j0)$，因此，$G(j\omega)$ 曲线和 $-\frac{1}{N(A)}$ 曲线必有交点，在交点处产生自持振荡。

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi A}{4b}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}=\frac{-\pi A}{4\times2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.5}{A}\right)^2}}\approx-5$$

解之得 $A_1=0.515$，$A_2=12.76$。因为 $A_1=0.515<0.707$，为不稳定的自振振幅；$A_2=12.76>0.707$，为稳定的自振振幅。

根据以上分析可知，系统产生自持振荡时的振幅为12.76，角频率为1rad/s。

【思考题】 简述用描述函数法分析非线性系统自持振荡的过程。

8.5 相平面法及系统分析

当非线性系统中的非线性特性比较显著，不能只考虑输出信号的基波分量时，或需要研究非线性系统在各种初始条件和不同输入信号作用下的运动状态时，将无法应用描述函数法进行分析，这时可利用相平面法进行分析。相平面法是分析非线性系统的另一种常用方法。相平面法是在几何平面上分析非线性系统的动态过程及其性能，只能适用于一阶系统和二阶系统。

8.5.1 相平面图的绘制

1. 相平面图的基本概念

一般地，设二阶系统的微分方程为

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}) \tag{8-21}$$

其中 $\ddot{x}$ 表示 x 的二阶导数，$\dot{x}$ 表示 x 的一阶导数，$f(x, \dot{x})$ 是关于 $\dot{x}$ 和 x 的函数。令 $x_1=x$，$x_2=\dot{x}$，则可以将式(8-21)转换成一阶微分方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f(x_1,x_2)\end{cases} \tag{8-22}$$

将式(8-22)中的两式相除，可得

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=\frac{f(x_1,x_2)}{x_2} \tag{8-23}$$

式(8-23)是以 x_1(或 x)为自变量、x_2(或 $\dot{x}$)为因变量的一阶微分方程，当初始条件不同时，该方程的解是不相同的。

通常，将由 x_1 和 x_2(或 x 和 $\dot{x}$)所组成的平面坐标称为相平面，相平面是二维的状态空间，其上的每一个点都代表了系统在相应时刻的状态。当时间 t 发生变化时，系统的状态

在相平面上运动的轨迹称为相轨迹，即 x_1 与 x_2 的关系曲线。当系统的初始状态不同时，可以得到一簇相轨迹。我们把相平面和相轨迹曲线簇称为相平面图，它清晰地表明了系统在不同初始条件下的运动。用相平面图分析非线性系统性能的方法称为相平面法。由于高阶系统的相轨迹不能用平面图表示，所以相平面法只适用于一、二阶系统。

2. 相平面图的绘制

由于二阶非线性系统在一定的取值区间可以转化为二阶线性系统，所以先介绍线性系统的相平面图绘制。相平面图的绘制方法有解析法、图解法等。解析法只适用于非线性系统的比较简单的微分方程或可以分段线性化的场合；当非线性系统的微分方程求解比较困难，或者根本就不可能求解时，可以使用图解法。

1）解析法

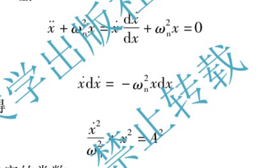
用解析法绘制相平面图的方法是先用解析法求出 x 和 $\dot{x}$ 对时间 t 的表达式，然后消去中间变量 t，求得 x 与 $\dot{x}$ 的关系式，最后用求得的关系式绘制相平面图。

【例8－4】 设二阶系统的微分方程为

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=0$$

试用解析法画出系统的相平面图。

解： 因为 $\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}dx}{dxdt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}$，所以



$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}+\omega_n^2 x=0$$

即

$$\dot{x}d\dot{x}=-\omega_n^2 x dx$$

对该式两边同时积分，可得

$$\frac{\dot{x}^2}{\omega_n^2}+x^2=A^2$$

其中，A 是由初始条件所确定的常数。

可见，x 与 $\dot{x}$ 关系式满足椭圆的方程，即系统的相轨迹是以坐标原点为中心的椭圆，其相平面图如图8.20所示。

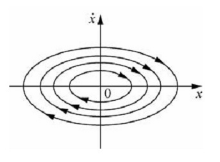


图8.20 例8－4的相平面图

2）图解法

图解法不需要求出相轨迹的方程就可以直接画出相轨迹曲线，图解法中应用比较多的是等倾线法和δ法，本节只介绍等倾线法，它适用于非线性特性可以用数学表达式表示的非线性系统。

设二阶系统可以用式(8－21)描述，即

$$\ddot{x}=f(x,\ \dot{x})$$

该式可以化为

$$\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}=f(x,\ \dot{x})$$

则可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x,\dot{x})}{\dot{x}} \tag{8-24}$$

式(8-24)中$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}$是相轨迹的斜率，令其等于常数$\alpha$，则由式(8-24)可得等倾线的方程为

$$\alpha=\frac{f(x,\dot{x})}{\dot{x}} \tag{8-25}$$

对于相平面上满足式(8-25)的任何一个点，经过它们的相轨迹的斜率都等于α，将这些具有相同斜率的点连成一条线，就称为相轨迹的等倾线。给定一组α值，便可求得相应的等倾线，利用等倾线，可以确定相平面上任意一点的相轨迹的斜率。通常，在每条等倾线上标示出斜率为α的带有箭头的短线段，箭头的方向表示相轨迹通过该等倾线时的方向，从而得到相轨迹的方向场，只要从初始点出发，依次连接各相邻等倾线上短线段，就可以得到在已知初始条件下的完整相轨迹。对于线性系统，等倾线是直线；而对于非线性系统，等倾线是曲线。

【例8-5】 设二阶系统的微分方程为

$$\ddot{x}+x=0$$

试用等倾线法画出系统的相平面图。

解：系统的微分方程可以化为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x}=-x$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{\dot{x}}$$

令$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\alpha$，则可以得到等倾线方程为

$$\alpha=-\frac{x}{\dot{x}}$$

所以

$$\dot{x}=-\frac{1}{\alpha}x$$

表明等倾线是过相平面原点的一簇直线。令$\beta=-\frac{1}{\alpha}$，即等倾线的斜率用β表示。表8-2列出了取不同α值时等倾线的斜率β和等倾线与x轴的夹角θ。

表8-2　例8-5中不同α取值所对应的等倾线的斜率β和等倾线与x轴的夹角

α	-2.78	-1.19	-0.58	-0.18	0.18	0.58	1.19	2.78	∞
β	0.36	0.84	1.72	5.56	-5.56	-1.72	-0.84	-0.36	0
θ	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°

表8-2所列的不同α取值时的等倾线如图8.21所示，等倾线上的带有箭头的短线段表示相轨迹的斜率α。在绘制相轨迹时，假设给定初始条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$，则可以得到一条相轨迹，它是一个圆，如图8.21所示，图中的A点为起始点，即A点的坐标

为$(x_0, 0)$。改变初始条件，可以得到一簇同心圆。

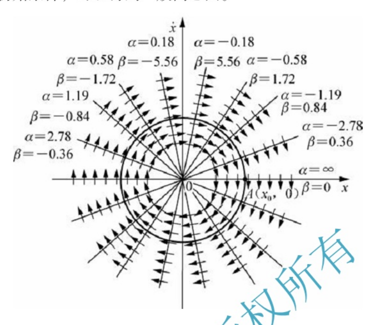


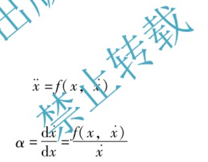
图 8.21　例 8−5 的等倾线和相轨迹

【思考题】　简述用等倾线法绘制相轨迹的方法。

8.5.2　奇点与极限环

1. 奇点

设二阶系统的微分方程为



$$\ddot{x}=f(x, \dot{x})$$

则其等倾线方程可以表示为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

假设$f(x, \dot{x})$和$\dot{x}$不同时为0，则α是确定的值。如果相轨迹上的某点具有确定的α值，则该点称为普通点。由于普通点的斜率是确定的，所以经过普通点的相轨迹只有一条。

如果$f(x, \dot{x})$和$\dot{x}$同时为0，则$\alpha=\frac{0}{0}$是不定式，相轨迹的斜率不确定，可以由无限多条相轨迹通过该点，这样的点称为奇点。在奇点处系统处于平衡状态，所以奇点又被称为平衡点，平衡点可以是稳定的，也可以是不稳定的。由于$\dot{x}=0$，所以奇点只能出现在x轴上。

设二阶线性系统的微分方程为

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}x=0 \tag{8-26}$$

该式可以改写为

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}x=0 \tag{8-27}$$

令相轨迹的斜率$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\alpha$，代入式(8−27)中，得到的等倾线方程为

$$\dot{x}=\frac{-\omega_{\mathrm{n}}^{2}}{2\zeta\omega_{\mathrm{n}}+\alpha}x \tag{8-28}$$

可见，等倾线是过原点的直线。

式(8－26)所示的微分方程，当电路参数不同时，其特征方程的特征根在复平面上有六种可能的形式，从而对应了六种不同的奇点和相轨迹。不同奇点的相平面图和特点如表8－3所示。

表8－3　不同奇点的相平面图和特点

奇点类型	特征根分布	相平面图	特点
稳定节点 ($\zeta>1$)			相平面上有四条直线相轨迹，将相平面分成四个区域，每个区域内的相轨迹只能在该区域内运动而不能穿越到别的区域，称它们为相轨迹的渐近线。除渐近线外，相轨迹是一簇趋向于原点的抛物线。系统在奇点附近是稳定的
不稳定节点 ($\zeta<-1$)			相平面图上有四条发散的直线相轨迹，即有四条渐近线。除渐近线外，相轨迹是从原点出发的一簇渐近发散型抛物线。系统在奇点附近是不稳定的
稳定焦点 ($0<\zeta<1$)			相轨迹按螺旋线呈收敛状，最终收敛于坐标原点。系统在奇点附近是稳定的
不稳定焦点 ($-1<\zeta<0$)			相轨迹按螺旋线呈发散状，坐标原点是螺旋线的焦点。系统在奇点附近是不稳定的
中心点 ($\zeta=0$)			相轨迹是一簇圆心位于坐标原点的同心椭圆曲线。系统在奇点附近可能是稳定的，也可能是不稳定的，与忽略掉的高次项有关
鞍点 ($\zeta=\pm1$)			相平面上有两条直线等倾线，上面重叠分布四条直线相轨迹，将相平面分为四个区域。每个区域的相轨迹是一簇双曲线，以斜率为S_1的等倾线渐进发散。系统在奇点附近是不稳定的

2. 极限环

非线性系统的自持振荡在相平面图中表现为一个孤立的封闭相轨迹，被称为极限环。与极限环相邻的所有相轨迹，不是卷向极限环，就是卷离极限环。

1）稳定极限环

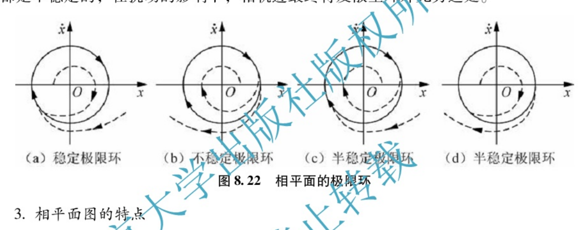
在稳定极限环的内外邻域内，所有相轨迹均卷向该极限环，如图 8.22(a)所示。稳定极限环的内部是不稳定区，相轨迹发散；稳定极限环的外部是稳定区，相轨迹收敛。稳定极限环对应着非线性系统中稳定的临界稳定点，即非线性系统产生自持振荡。

2）不稳定极限环

在不稳定极限环的内外邻域内，所有相轨迹均卷离该极限环，如图 8.22(b)所示。不稳定极限环的内部是稳定区，相轨迹收敛于环内的稳定奇点；不稳定极限环的外部是不稳定区，相轨迹发散。不稳定极限环对应着非线性系统中不稳定的临界稳定点。

3）半稳定极限环

在半稳定极限环的内外邻域内，相轨迹有相同的稳定性，要么都是收敛的，要么都是发散的如图 8.22(c)、(d)所示。在图 8.22(c)中，极限环内外的邻域都是稳定的，在扰动的影响下，相轨迹最终将趋向于环内稳定的奇点。在图 8.22(d)中，极限环内外的邻域都是不稳定的，在扰动的影响下，相轨迹最终将发散至环外无穷远处。



(a) 稳定极限环　(b) 不稳定极限环　(c) 半稳定极限环　(d) 半稳定极限环

图 8.22　相平面的极限环

3. 相平面图的特点

根据前面的分析，可以总结出相平面图的一些特点。

1）坐标轴比例相同

相平面图的 $\dot{x}$ 轴和 x 轴应采用相同比例的坐标。

2）相轨迹曲线的对称性

对于二阶系统微分方程 $\ddot{x}=f(x,\ \dot{x})$，如果满足 $f(x,\ -\dot{x})=f(x,\ \dot{x})$，则相轨迹关于 x 轴对称；如果满足 $f(-x,\ \dot{x})=-f(x,\ \dot{x})$，则相轨迹关于 $\dot{x}$ 轴对称；如果满足 $f(-x,\ -\dot{x})=-f(x,\ \dot{x})$，则相轨迹关于原点对称。

3）相轨迹的走向

在相平面图的上半平面，由于 $\dot{x}>0$，x 将逐渐增大，所以系统的状态沿相轨迹自左向右运动；在相平面图的下半平面，由于 $\dot{x}<0$，x 将逐渐减小，所以系统的状态沿相轨迹自右向左运动；在 x 轴上，由于 $\dot{x}=0$，除去 $f(x,\ \dot{x})=0$ 的奇点外，其他点上相轨迹的斜率都等于无穷大，所以一般相轨迹垂直过 x 轴，即相轨迹与 x 轴正交。

4）相轨迹与初始状态密切相关

对于任何一个给定的初始条件，都有特定的相轨迹与之对应，当初始条件不同时，相轨迹也不相同，所以相轨迹与初始条件密切相关。

5）奇点是系统的平衡点

在奇点处，由于相变量的各阶导数都等于 0，因此，奇点是系统的平衡点。

8.5.3 用相平面法分析非线性系统

1. 由相平面图求时域响应

相平面图上的相轨迹比较直观地描述了系统的运动过程，但它没有明显地表达出时间的概念。相轨迹上的点代表了某一时刻的时域响应值和它的一阶导数值，如果需要求得时域响应曲线，需根据相轨迹上的时域响应值和它的一阶导数值将时间值计算出来，这样就可以根据时间值和时域响应值将时域响应曲线绘制出来。下面介绍一种求解时间值的近似方法。

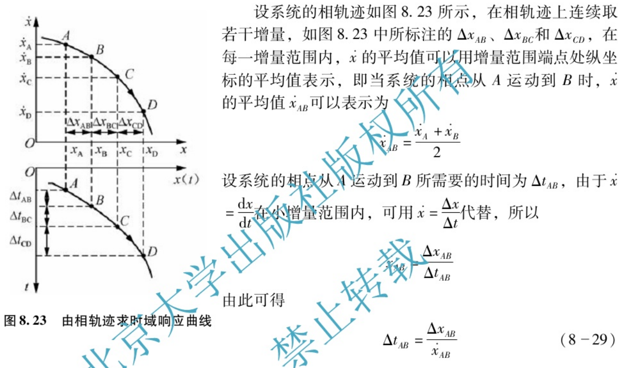


图 8.23 由相轨迹求时域响应曲线

设系统的相轨迹如图 8.23 所示，在相轨迹上连续取若干增量，如图 8.23 中所标注的 Δx_{AB}、Δx_{BC}和 Δx_{CD}，在每一增量范围内，$\dot{x}$ 的平均值可以用增量范围端点处纵坐标的平均值表示，即当系统的相点从 A 运动到 B 时，$\dot{x}$ 的平均值 $\dot{x}_{AB}$ 可以表示为

$$\dot{x}_{AB}=\frac{\dot{x}_A+\dot{x}_B}{2}$$

设系统的相点从 A 运动到 B 所需要的时间为 Δt_{AB}，由于 $\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$在小增量范围内，可用 $\dot{x}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$代替，所以

$$\dot{x}_{AB}=\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}}$$

由此可得

$$\Delta t_{AB}=\frac{\Delta x_{AB}}{\dot{x}_{AB}} \tag{8-29}$$

因此，可以求出相点从 A 运动到 B 所需要的时间。

用同样的方法可以求得相点从 B 到 C、从 C 到 D…所需的时间，这样便可以求出系统的时域响应曲线 $x(t)$，如图 8.23 所示，从而可以进一步求得系统的时域响应指标。

2. 用相平面图分析非线性系统

用相平面法分析非线性系统时，一般先求出系统的奇点，然后再绘制相平面图。如果非线性方程在奇点附近可以线性化，则先根据线性化方程的特征根去判断奇点的类型，然后绘出奇点附近的相轨迹。如果非线性方程在奇点附近不能线性化，则先将非线性环节的非线性特性作分段线性化处理，将相平面划分为几个线性区域，并分别求出各个线性区域的线性微分方程和奇点，并判断奇点是实奇点还是虚奇点(如果奇点在该区域内，则称为实奇点，否则称为虚奇点)，绘出各个区域的相轨迹，然后在各个区域的边界线上，把各区域的相轨迹连接起来，就可以得到完整的非线性系统的相轨迹。

【例 8-6】 设具有饱和非线性特性的非线性控制系统结构如图 8.24 所示，已知 $a=1$，$b=2$，$T=1$，$K=1$，假设系统开始时处于静止状态，试求系统在阶跃输入信号 $r(t)=R\cdot 1(t)$时的相轨迹和系统响应特性。

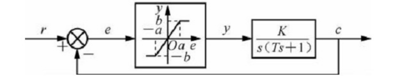


图 8.24 例 8-6 的系统结构图

解：由图 8.24 中线性部分的结构可知

$$T\ddot{c}+\dot{c}=Ky$$

选取 e 和 $\dot{e}$ 作为相变量，由于 $e=r-c$，所以

$$T(\ddot{r}-\ddot{e})+(\dot{r}-\dot{e})=Ky$$

即

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Ky=T\ddot{r}+\dot{r} \tag{8-30}$$

当阶跃输入信号 $r(t)=R\cdot 1(t)$ 作用于系统时，由于 $\ddot{r}=\dot{r}=0$，所以式(8-30)变为

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Ky=0 \tag{8-31}$$

饱和非线性的特性可以表示为

$$y(t)=\begin{cases} be(t)/a & |e(t)|\leqslant a \\ b & e(t)>a \\ -b & e(t)<-a \end{cases} \tag{8-32}$$

将式(8-32)代入式(8-31)中，并将 $a=1$，$b=2$，$T=1$，$K=1$ 代入，可得

$$\begin{cases} \ddot{e}+\dot{e}+2e=0 & |e|\leqslant 1 \\ \ddot{e}+\dot{e}+2=0 & e>1 \\ \ddot{e}+\dot{e}-2=0 & e<-1 \end{cases} \tag{8-33}$$

直线 $e=1$ 和 $e=-1$ 将相平面分成Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域，如图 8.25 所示。

在Ⅰ区，因为 $\ddot{e}+\dot{e}+2e=0$，所以

$$\dot{e}\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}+\dot{e}+2e=0$$

令 $\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\alpha_1$，得到的等倾线方程为

$$\dot{e}=\frac{-2}{1+\alpha_1}e \tag{8-34}$$

此时，$\ddot{e}+\dot{e}+2e=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+2=0$，其特征根为 $\lambda_{1,2}=-0.5\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以系统的奇点(即原点)是稳定的焦点，其相轨迹呈螺旋状收敛于原点。

在Ⅱ区，因为 $\ddot{e}+\dot{e}+2=0$，令 $\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\alpha_2$，得到的等倾线方程为

$$\dot{e}=\frac{-2}{1+\alpha_2} \tag{8-35}$$

在该区域内没有奇点，相轨迹的等倾线为一簇平行于 e 轴的水平线。相轨迹的渐近线为

$$\lim_{\alpha_2\to 0}\dot{e}=\lim_{\alpha_2\to 0}\frac{-2}{1+\alpha_2}=-2$$

在该区域，所有的相轨迹向直线 $\dot{e}=-2$ 渐近。

在Ⅲ区，因为$\ddot{e}+\dot{e}-2=0$，令$\frac{\mathrm{d}\dot{e}}{\mathrm{d}e}=\alpha_3$，得到的等倾线方程为

$$\dot{e}=\frac{2}{1+\alpha_3} \tag{8-36}$$

在该区域内没有奇点，相轨迹的等倾线为一簇平行于e轴的水平线。相轨迹的渐近线为

$$\lim_{\alpha_3\to 0}\dot{e}=\lim_{\alpha_3\to 0}\frac{2}{1+\alpha_3}=2$$

在该区域，所有的相轨迹向直线$\dot{e}=2$渐近。

由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域的等倾线方程绘制相轨迹的方向场，并绘制相轨迹曲线，如图8.25中的虚线所示。当相轨迹经过$e=1$和$e=-1$时，相轨迹的线性部分发生了切换，所以将$e=1$和$e=-1$称为开关线。

由于系统开始时处于静止状态，输入量作用瞬间由于系统惯性的作用，使输出状态不发生突变，响应的初始值$c(0_+)=c(0_-)=0$，$\dot{c}(0_+)=\dot{c}(0_-)=0$，将初始值代入到$e=r-c$中，可得输入量作用瞬间相变量的初始值，即

$$\begin{cases} e(0_+)=R \\ \dot{e}(0_+)=0 \end{cases} \tag{8-37}$$

假设阶跃输入信号$r(t)=R\cdot 1(t)=3$，则系统相轨迹的初始相点为(3，0)，最后收敛于平衡点，完整的相轨迹如图8.25中实线所示，可见该系统无稳态误差。

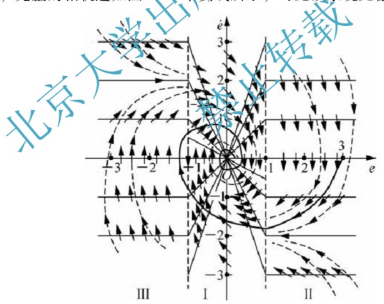


图8.25　例8-6的相平面图

【思考题】　简述相平面法分析非线性系统的步骤。

8.6　MATLAB用于非线性系统分析

MATLAB中的Simulink提供了大量的仿真工具，利用Simulink所提供的模块库可以构建非线性系统的仿真模型，从而通过仿真来了解相应非线性系统的性能。利用MATLAB

中的 Simulink 进行非线性系统仿真的一般过程：首先在 Simulink 模块库中选取相应的非线性模块、传递函数模块、外部激励模块和显示模块等；然后按照系统的实际结构，将相应的模块连接起来，构成系统的仿真模型；最后设定仿真模型输入信号的幅值、响应时间等参数，进行仿真研究。

1. 非线性特性模块的构建

在 Simulink 中的 Discontinuities(非连续系统)子模块库中给出了部分常用非线性特性模块，包括 Backlash(间隙)、Coulomb & Viscous Friction(库仑摩擦和粘滞摩擦)、Dead Zone(死区)等 12 种，在进行系统仿真时可以直接使用这些非线性特性模块。但对于 Discontinuities 子模块库中没有提供的非线性特性模块，则需要自己构建。Simulink 可以构建任意的静态非线性模块，无论是单值非线性，还是多值非线性，都可以直接应用于仿真。


【例 8-7】 利用 Simulink 构建如图 8.26 所示的非线性特性。

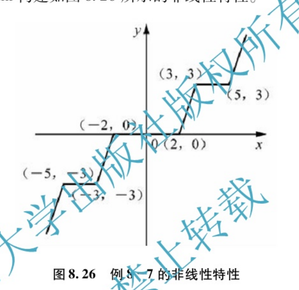


图 8.26 例 8-7 的非线性特性

解：(1)新建一个空白模型。在菜单栏执行“File | New | Model”菜单命令后，系统弹出一个未命名的空白模型。

(2) 添加 Lookup Table 模块。在模板中添加 Lookup Tables(寻表操作组)子模块库中的 Lookup Table 模块。

(3) 设置 Lookup Table 模块属性。双击 Lookup Table 模块进入其属性设置对话框，如图 8.27 所示。在属性设置对话框中添加非线性特性值，Vector of input values 栏为横坐标向量，Table data 栏为纵坐标向量。在设置非线性特性值时不能只添加图 8.26 所示的转折点坐标，否则位于最左侧和最右侧外边的特性将无法实现，为此根据非线性特性的特点，在最左侧转折点之外添加了一个点(−6, −6)，在最右侧转折点之外添加了一个点(6, 6)。

(4) 结束。Lookup Table 模块属性设置完成后，左击图 8.27 中的“OK”按钮，就可以得到所创建的非线性特性，如图 8.28 所示。

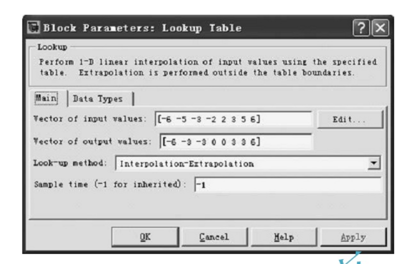


图 8.27　Lookup Table 属性对话框

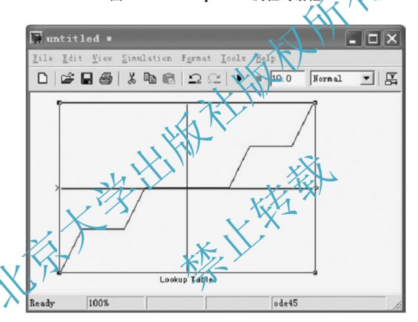


图 8.28　图 8.26 所示非线性特性的仿真图

2. 基于 MATLAB 的自持振荡分析

利用 Simulink 中的模块构建非线性系统模型，可以进行非线性系统的分析，以判断是否存在自持振荡，如果存在，可以求出自持振荡的振荡幅值和频率。

【例 8－8】　设具有饱和非线性特性的非线性系统结构如图 8.29 所示，已知 $a=1$、$b=1$，试判断系统是否存在自持振荡，若存在，则求出自持振荡的幅值和频率。

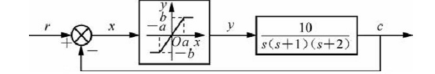


图 8.29　例 8－8 的系统结构图

解： 根据图 8.29 所示系统结构，在 Simulink 中选择相应的饱和非线性模块 Saturation、传递函数模块 Zero－Pole、外部激励模块 Step 和显示模块 Scope 等，构成如图 8.30 所示的仿真模型图。启动仿真，得到的仿真结果如图 8.31 所示。从图 8.31 中可以看出，图 8.29 所示的非线性系统在单位阶跃信号的作用下，产生了自持振荡，振荡的幅值和周期分别为 4 和 4.5s，则可以求得振荡的频率为 1.4rad/s。

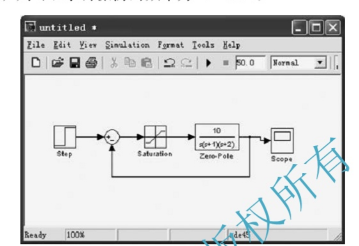


图 8.30　例 8－8 的仿真模型图

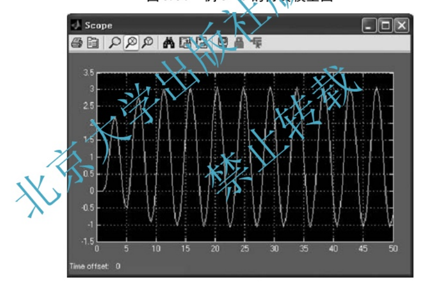


图 8.31　例 8－8 的仿真结果图

3. 基于 MATLAB 的相轨迹绘制

利用 Simulink 中的模块构建非线性系统模型，还可以绘制系统的相轨迹，并求系统的响应曲线。

【例 8－9】 设具有饱和非线性特性的非线性系统结构如图 8.32 所示，已知 $a=1$、$b=1$，试求系统在单位阶跃信号作用下的相轨迹和单位阶跃响应曲线。

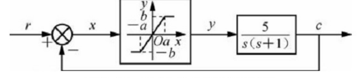


图 8.32　例 8－9 的系统结构图





解：根据图8.29所示系统结构，在Simulink中选择相应的饱和非线性模块Saturation、传递函数模块Transfer Fcn、积分模块Integrator、外部激励模块Step、显示模块Scope与XY Graph等，构成如图8.33所示的仿真模型图。启动仿真，就可以得到如图8.34所示的相轨迹和图8.35所示的单位阶跃响应曲线。

图8.33　例8－9的仿真模型图

图8.34　例8－9的相轨迹图



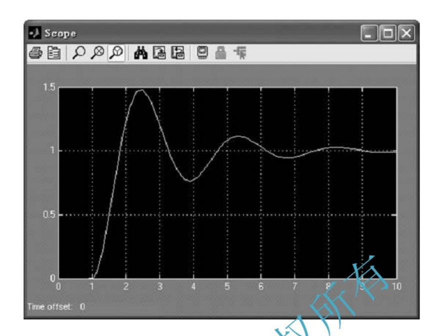


图 8.35 例 8－9 的单位阶跃响应曲线



小结

含有非线性元件或环节的控制系统称为非线性控制系统，简称非线性系统。典型的非线性特性有饱和非线性、死区非线性、间隙非线性、继电器非线性等。非线性系统不满足叠加原理。

非线性系统的动态响应有许多奇异现象，其中最常见和工程中最关心的是自持振荡（自振），这是一种常驻的或称稳定的周期运动。激烈的自振，对系统的破坏作用很大，应力求避免。

非线性系统的稳定性与系统的初始条件和输入信号大小有关，因此不能笼统地讲稳定与否，而必须指明多大范围内的稳定性。

非线性特性的描述函数是指在满足一定的条件下，对非线性元件或环节在正弦信号作用下的输出进行谐波线性化处理，使非线性系统变为一个近似的线性系统。因此，描述函数法是一种近似的分析方法，是线性元件的频率特性在非线性特性中的推广。

描述函数法主要分析非线性系统的稳定性和自持振荡。方法的要点是用一次基波分量代替输出的总体。因此，应用此方法必须注意两个条件：

（1）非线性特性输出中的高次谐波振幅较小。

（2）线性部分具有低通滤波性能。

一般来说，系统的阶次越高，滤波性能越好，因此方法的使用准确度也愈高。但对一、二阶系统的分析，有时会得出错误的结论。

根据非线性元件或环节的描述函数负倒数 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线与线性环节的开环幅相频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线的相对位置，可以判断非线性系统的稳定性。如果 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线不包围 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线，则非线性系统稳定；如果 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线，则该非线性系统不稳



定。当 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线与 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线相交时，系统可能产生自持振荡，自持振荡的振幅和频率可由交点处的坐标求得。

相平面法是一种求解二阶以下线性或非线性微分方程的图解方法，它不但能给出系统的稳定性信息和时间特性信息，而且能给出系统运动轨迹的清晰图像。绘制相轨迹的方法有解析法和图解法两种。解析法只适用于非线性系统中比较简单的微分方程或可以分段线性化的场合；当非线性系统的微分方程求解比较困难，或者根本就不可能求解时，可以使用图解法。用相平面法分析非线性系统时，一般先求出系统的奇点，然后再根据奇点的性质绘制相平面图。

习　　题

一、填空题

1. 如果非线性特性不明显，可以线性化处理的非线性特性称为________非线性；如果非线性特性比较明显，不能进行线性化处理，则称为________非线性。

2. 在非线性系统中，即使没有外加作用，系统也可能产生振幅和频率固定的稳定振荡，这种现象称为________。

3. 非线性系统的稳定性不但与系统的结构和参数有关，还与系统的______和______有关。

4. 常见的非线性特性有________、________、________和________等。

5. 当非线性系统中线性环节的开环幅相频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 曲线包围非线性环节的描述函数负倒数特性 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 曲线时，非线性系统________。

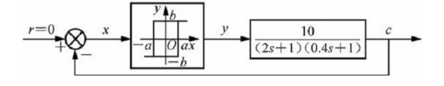
6. 非线性系统中的极限环分为________极限环、________极限环和________极限环。

7. 在相平面图的上半平面，系统的状态沿相轨迹________运动；在相平面图的下半平面，系统的状态沿相轨迹________运动。

二、分析与计算题

1. 求 $y(t)=ax^3(t)$ 的描述函数。

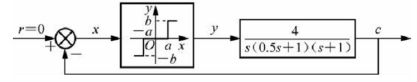
2. 设具有滞环继电器非线性特性的非线性系统结构如题图 8.1 所示，已知 $b=1$、$a=0.3$，试判断系统是否存在自持振荡，若存在，则求出自持振荡的幅值和频率。



题图 8.1

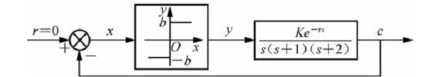
3. 设具有死区继电器非线性特性的非线性系统结构如题图 8.2 所示，已知 $a=1$、$b=3$。试分析系统的稳定性，并求系统不产生自持振荡时 a 与 b 应满足什么关系？

4. 具有理想继电器非线性特性的非线性系统如题图 8.3 所示，已知 $b=1$。(1) 当 $\tau=0$ 时，系统受到扰动后会出现什么样的运动形式？(2) 当 $\tau\neq0$ 时，如果系统输出产生



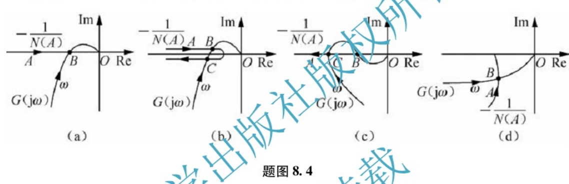
题图 8.2

一个振幅为4、角频率为1rad/s的自持振荡，求系统参数K和τ的值。



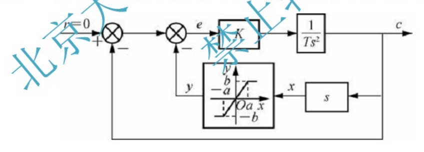
题图 8.3

5. 判断如题图8.4所示的系统是否稳定，是否存在自持振荡。



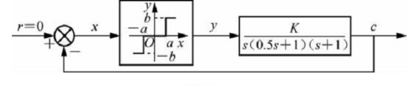
题图 8.4

6. 将题图8.5所示的非线性系统化为串联形式，并求出等效的开环传递函数。



题图 8.5

7. 设具有死区继电器非线性特性的非线性系统结构如题图8.6所示，已知$a=1$、$b=3$。试用描述函数法分析K值与系统产生自持振荡的关系，并求$K=3$时自持振荡的振幅和振荡频率。

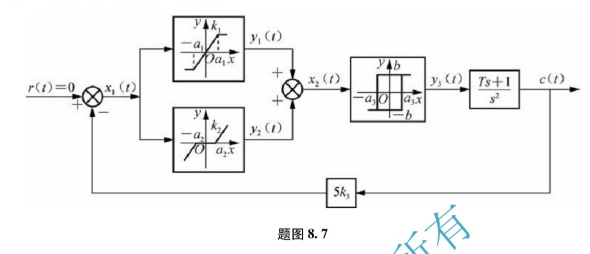


题图 8.6

8. 设非线性系统结构如题图8.7所示，已知$a_1=a_2=a_3=1$，$k_1=k_2=k_3=1$，$b=1$。

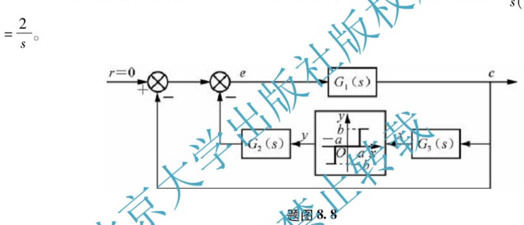


分析当 $T=0.5$ 时系统是否存在自持振荡，如果存在，求出振荡时的振幅和频率，并讨论参数 T 的变化对系统自振的影响。



题图 8.7

9. 设非线性系统结构如题图 8.8 所示，其中 $a=1$，$b=1$，$G_1(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，$G_2(s)=\dfrac{2}{s}$。



题图 8.8

（1）当 $G_3(s)=1$ 时，分析系统是否存在自持振荡，如果存在，求出振荡时的振幅和频率。

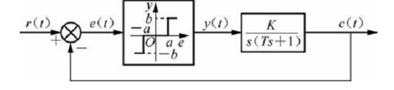
（2）当 $G_3(s)=s$ 时，试分析其对系统的影响。

10. 二阶系统的运动方程为 $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$，试用等倾线法绘制系统的相轨迹。

11. 求系统运动方程 $\ddot{x}+\sin x=0$ 的全部平衡点及其相轨迹。

12. 试用相平面法分析二阶系统 $\ddot{x}+0.5\dot{x}+x^2+4x=0$ 的稳定性。

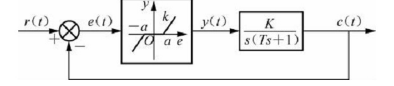
13. 设具有死区继电器非线性特性的非线性系统结构如题图 8.9 所示，假设系统开始时处于静止状态，求系统在阶跃输入信号时的相轨迹。



题图 8.9

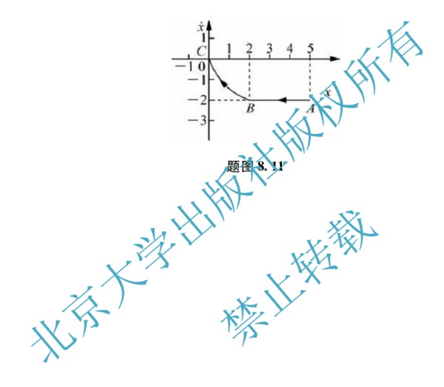
14. 设具有死区非线性特性的非线性系统结构如题图 8.10 所示，假设系统开始时处

于静止状态，已知 $r(t)=R\cdot 1(t)$，$k=1$。试画出系统关于误差 $e(t)$ 的相平面图。



题图 8.10

15. 已知某二阶非线性系统的一条相轨迹如题图 8.11 所示，图中原点(即 C 点)为平衡点，BC 段的相轨迹方程为 $\dot{x}^2=2x$，AB 段平行于 x 轴。试求相点从 A 点运动到原点所需的时间。



题图 8.11

附录 A　常用函数拉氏变换对照表

拉氏变换的象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$
e^{-nTs}	$\delta(t-nT)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}t^2$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-(1+at)e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$	$\sin\omega_n t$
$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos\omega_n t$
$\frac{\omega_n}{(s+a)^2+\omega_n^2}$	$e^{-at}\sin\omega_n t$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_n^2}$	$e^{-at}\cos\omega_n t$
$\frac{s}{(s^2+\omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n}t\sin\omega_n t$
$\frac{s^2}{(s^2+\omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n}(\sin\omega_n t+\omega_n t\cos\omega_n t)$
$\frac{\omega_n}{s^2-\omega_n^2}$	$\sinh\omega_n t$
$\frac{s}{s^2-\omega_n^2}$	$\cosh\omega_n t$
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}(0<\zeta<1)$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t$
$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}(0<\zeta<1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t-\varphi)\quad \varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}(0<\zeta<1)$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\varphi)\quad \varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
$\frac{As+B}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\quad(0<\zeta<1)$	$e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{B-\zeta A\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+A\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$

附录 B　常用函数 Z 变换对照表

原函数 $f(t)$	Z 变换的象函数 $F(z)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
$\dfrac{1}{2!}t^2$	$\dfrac{T^2 z(z+1)}{2!\,(z-1)^3}$
$\dfrac{1}{3!}t^2$	$\dfrac{T^3(z^2+4z+1)}{3!\,(z-1)^4}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$
$t\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{Tz\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{z(1-\mathrm{e}^{-aT})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT})}$
$\sin\omega_{\mathrm{n}}t$	$\dfrac{z\sin\omega_{\mathrm{n}}T}{z^2-2z\cos\omega_{\mathrm{n}}T+1}$
$\cos\omega_{\mathrm{n}}t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_{\mathrm{n}}T)}{z^2-2z\cos\omega_{\mathrm{n}}T+1}$
$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_n t$	$\dfrac{z\mathrm{e}^{-aT}\sin\omega_{\mathrm{n}}T}{z^2-2z\mathrm{e}^{-aT}\cos\omega_{\mathrm{n}}T+\mathrm{e}^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega_n t$	$\dfrac{z^2-z\mathrm{e}^{-aT}\cos\omega_{\mathrm{n}}T}{z^2-2z\mathrm{e}^{-aT}\cos\omega_{\mathrm{n}}T+\mathrm{e}^{-2aT}}$
$\sinh\omega_{\mathrm{n}}t$	$\dfrac{z\sinh\omega_{\mathrm{n}}T}{z^2-2z\cosh\omega_{\mathrm{n}}T+1}$
$\cosh\omega_{\mathrm{n}}t$	$\dfrac{z(z-\cosh\omega_{\mathrm{n}}T)}{z^2-2z\cosh\omega_{\mathrm{n}}T+1}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$